ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ЛАБОРАТОРИЯ СТРУКТУРНЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА
ДАННЫХ В ПРЕДСКАЗАТЕЛЬНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
(ПРЕМОЛАБ)
МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

РОССИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЩЕСТВО
ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013)

Москва, 15-19 октября, 2013

ТРУДЫ
ТОМ II

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2013

УДК 519.83

Составитель и редактор:
канд. физ.-матем. наук В.П. Вржещ
Ответственный редактор:
доктор физ.-матем. наук Е.З. Мохонько

В сборнике представлена вторая часть трудов VII Московской международной конференции по исследованию операций. Конференция проводится Вычислительным центром им. А.А. Дородницына Российской академии наук, факультетом ВМК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Лабораторией структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании (ПреМоЛаб) Московского физико-технического института и Российским научным обществом исследования операций при поддержке научно-организационного центра «СТРАДО» и РФФИ, проект № 13-01-06092 Г "Научный проект организации VII Московской международной конференции по Исследованию Операций (ORM2013), Москва, 15-19 октября 2013" (2013 г.).

На конференции обсуждаются математические вопросы исследования операций, последние достижения в области исследования операций, модели исследования операций в экономике, экологии, медицине, политологии и др.

Ключевые слова: исследование операций, математические модели, теория игр, конференция, новые модели и методы исследования операций, оптимизационные методы исследования операций, многокритериальная оптимизация, исследование операций в экономике, исследование операций в военном деле, исследование операций в банковском деле и на финансовых рынках, исследование операций в страховании и риск-менеджменте, исследование операций в медицине, биологии и экологии, автоматизированное проектирование, теоретико-игровые модели, анализ политических процессов и коррупции, рынки и аукционы: анализ и проектирование, предсказательное моделирование транспортных потоков.

Рецензенты: Ю.А. Флеров, А.А. Васин.

The second volume of proceedings of the VII Moscow International Conference on Operations Research. The conference is organized by Dorodnicyn Computing Center of Russian Academy of Sciences (CC RAS), Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University (MSU), Laboratory for Structural Methods of Data Analysis in Predictive Modeling (PreMoLab), Russian Scientific Operations Research Society and supported by "STRADO" and Russian Foundation for Basic Research (RFBR), project No. 13-01-06092 G.

The conference aims mathematical problems of operations research, latest achievements, new models in economics, ecology, medicine, political science, etc.

Key words: operations research, mathematical models, game theory, conference, new models and methods, optimization methods, multiple objective decision making, OR in economics, OR in military science, OR in finance and banking, OR in insurance and risk-management, OR in medicine, biology and ecology, computer-aided design, game-theoretic models, analysis of political processes and corruption, markets and auctions: analysis and design, predictive models for congested traffic.

Научное издание

©Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской Академии наук, 2013

©Научно-образовательный центр "Прикладное исследование операций"
ВЦ РАН и ВМК МГУ

VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013) 15-19 октября 2013

Председатель конференции:
президент РНОИО академик РАН П.С. Краснощеков

Глава совета Российского научного общества исследования операций (РНОИО):
академик РАН Ю.И. Журавлев

Председатель программного комитета конференции:
член-корр. РАН И.Г. Поспелов

Программный комитет:
проф. Ф.Т. Алескеров (ГУ ВШЭ), академик РАН Ю.Г. Евтушенко, проф. М. Ячимович (Университет Черногории), проф. Ю. Нестеров (CORE, Universite Catholique de Louvain), член-корр. РАН Ю.Н. Павловский, член-корр. РАН К.В. Рудаков, вице-президент РНОИО академик РАН Г.И. Савин, проф. Я.Д. Сергеев (DEIS, Università della Calabria, Italy), М.В. Солодов (IMPA, Рио де Жанейро, Бразилия), проф. А.А. Васин (МГУ), Г.-В. Вебер (Среднеазиатский технический университет, Анкара, Турция), глава совета РНОИО академик РАН Ю.И. Журавлёв.

Оргкомитет:
член-корр. РАН Ю.А. Флеров (сопредседатель, ВЦ РАН), проф. А.А. Васин (сопредседатель, МГУ), проф. А.А. Белолипецкий, доц. Д.В. Денисов, проф. Ф.И. Ерешко, проф. А.Ф. Измаилов, проф. А.В. Лотов, вице-президент РНОИО проф. Ю.Е. Малашенко, проф. Е.З. Мохонько, доц. В.В. Морозов, проф. Н.М. Новикова, доц. И.И. Поспелова, проф. А.А. Шананин.

Секретарь конференции: В.П. Вржещ.
Заместитель секретаря: С.А. Вартанов.
При поддержке РФФИ, проект № 13-01-06092 Г и научно-организационного центра «СТРАДО».

СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

Новые модели и методы исследования операций	**5**
Оптимизационные методы исследования операций	**22**
Многокритериальная оптимизация	**58**
Исследование операций в экономике	**72**
Исследование операций в военном деле	**94**
Исследование операций в банковском деле и на финансовых рынках	**96**
Исследование операций в страховании и риск-менеджменте	**118**
Исследование операций в медицине, биологии и экологии	**124**
Автоматизированное проектирование	**137**
Теоретико-игровые модели	**146**
Анализ политических процессов и коррупции	**166**
Рынки и аукционы: анализ и проектирование	**177**
Предсказательное моделирование транспортных потоков	**193**

Новые модели и методы исследования операций

1. *В.К. Исаев, В.В. Золотухин* Некоторые задачи построения интегрированной интеллектуальной системы организации и управления безопасным воздушным движением 5
2. *Ю.Е. Малашенко, И.А. Назарова* Управление выполнением ресурсоемких заданий в условиях неопределенности 7
3. *И.С. Меньшиков, О.Р. Меньшикова, А.Н. Чабан* Использование методов экспериментальной экономики в исследовании операций 8
4. *И.С. Меньшиков, Р.И. Яминов* Методы оптимизации использования каналов связи в системах коллективного доступа к сети Интернет 10
5. *О.В. Муравьёва* Решение несобственных задач регрессии и классификации на основе методов коррекции 12
6. *М.В. Мурашкин* Размытое равновесие Байеса-Нэша в играх двух игроков 12
7. *А.Л. Мячин* Анализ данных образования и патентной активности с использованием методов анализа паттернов 13
8. *И.А. Назарова* Методы решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети 15
9. *О.А. Попова* О подходах к построению дополнительных оснований в принятии экономических решений 15
10. *С.А. Скиндерев* Исследование особенностей поведения участников лабораторных игр при изменениях условий проведения экспериментов 17
11. *Е.В. Хорошилова* Краевые задачи линейного программирования в оптимальном управлении 19
12. *Р.И. Яминов* Уточнение модели поведения участников эксперимента с учетом психофизиологических характеристик 20

Некоторые задачи построения интегрированной интеллектуальной системы организации и управления безопасным воздушным движением

В.К. Исаев[1,2,3], В.В. Золотухин[2]

[1]*Центральный аэрогидродинамический институт имени проф. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ)*

[2]*Московский физико-технический институт*

[3]*Московский авиационный институт*

Ключевые слова: Air Traffic Management (ATM), организация воздушного движения (ОрВД), вихревая безопасность воздушных судов, агентный подход, Satisficing Game Theory, концепция свободного полета (Free Flight).

Рассматривается задача построения системы организации воздушного пространства (ОрВД) [1] и управления движением (УВД) воздушных судов (ВС) с минимальным временным отклонением от графика полета, при условии предотвращения конфликтов трех видов: возможных столкновений, опасных сближений, попаданий в вихревой след других ВС [2]. Временное отклонение рассчитывается как разность между фактическим временем и временем, которое понадобилось бы ВС при движении по маршруту в отсутствии других ВС.

Для первой задачи (ОрВД) возникает задача планирования (проектирования) 4D-контрактов (траекторий) с учетом возможности образования коалиций (образованных из «дружественных» и «противоборствующих» по направлению основных потоков ВД.

Рассматриваются виды коалиций, с учетом движения ВС внутри коалиции («струны», «стаи»), условия их создания и «разрушения», т.е. прекращения группового управления и движения. Рассматриваются задачи взаимодействия (и управления потоками движений) различных коалиций.

Для второй задачи (УВД) сохраняется важность децентрализованных алгоритмов принятия решений. Такие алгоритмы наделяют пилотов ВС не только бо́льшими возможностями управления, но и бо́льшей ответственностью за принятые решения. С другой стороны, нормы сокращенного вертикального

эшелонирования ИКАО в настоящее время составляют 150 метров. При изменении *уровня* полета ВС следует учитывать также то, ВС может покинуть пределы текущего эшелона (в этом случае должны применяться соответствующие лётные процедуры), поэтому проведение маневров, не приводящих к переключению эшелона, и маневров только в горизонтальной плоскости, имеет более высоких приоритет.

Для класса горизонтальных маневров применяется основанный на интеллектном управлении динамическими системами [3] подход – Satisficing Game Theory (SGT, [4]), с использованием независимых агентов. SGT математически хорошо обоснован и предлагает инструментарий проектирования агентных систем и естественный механизм для совместного достижения целей. Согласно концепции SGT, все агенты адаптивны и независимы (не нуждаются в централизованном контроле). Агенты получают достаточное решение, которое устанавливается путем сравнения значений двух функций, отражающих преимущества и недостатки решения (*функция риска – ФР*).

Управлением ВС выступают *скорость и возможные направления движения, присутствуют запрещенные для полета области.* Под запрещенными зонами понимаются зоны опасного сближения ВС, вихревой и метеоопасности. Отдельно учитывается природа конфликтной ситуации: для каждого её вида (столкновения, опасного, сближения, пересечения вихревого следа) различаются факторы, влияющие на ФР. Каждому виду конфликта поставлен в соответствие весовой коэффициент. Решение ищется при ряде допущений: между участниками воздушного движения происходит постоянный обмен полетными данными; каждое ВС способно обмениваться информацией с остальными участниками воздушного движения, находящимися в заданном радиусе.

Каждое ВС X_i, выступающее в роли агента, ранжирует весь набор окружающих ВС по ряду критериев: близость к пункту назначения, задержка, время полета. По результатам подсчитанных приоритетов из ВС составляется группа P_i (список приоритета), с входящими в нее ВС более высокого приоритета. В группу входят только те ВС, для которых необходимо разрешить конфликтную ситуацию с рассматриваемым бортом. Направление движения ВС, которое должно быть определено к окончанию очередного временного интервала, зависит от предпочтений всех ВС указанной группы. На основании полученной лётной информации каждый борт рассчитывает функции риска p_{R_i} и преимущества p_{S_i} для каждого альтернативного направления движения u_l^i [4], затем выбирает направление $u_l^i * \in U$, на котором разница между значениями функций преимущества и риска максимальна:

$$u_l^i * = \arg\max_{u_l^i \in U} \left(p_{S_i}(u_l^i *) - p_{R_i}(u_l^i *) \right)$$

Для рассматриваемых видов конфликтных ситуаций (столкновения, опасные сближения, попадания в вихревые следы) предложена техника построения функций преимущества и риска, учитывающая характерные для конфликта определенного вида факторы. Расположение вихрей не может быть рассчитано на определенный момент времени в будущем, как в задаче уклонения от вихрей единственного ВС[5]. Модели вихревой пелены от ВС и ее эволюции по времени [2,5], привязанные к каждому самолету-генератору, вносятся в динамический каталог потенциально опасных зон. Вихревая картина моделируется динамически [5]. Используются и развиваются методы группового управления [6]. Для задачи ОрВД Предложен и апробирован детальный алгоритм взаимодействия ВС с целью предотвращения конфликтов всех видов при помощи плоских маневров в горизонтальной плоскости.

Список литературы

1. *Е.А. Федосов* (общ. ред.). Программы развития систем организации воздушного движения Европы и США SESAR и NextGen. О.В. Дегтярев, И.Ф. Зубкова (сост.).– М.: ФГУП «ГосНИИАС», Научно-информ. Центр, 2011, С. 256.
2. *В.К. Исаев, В.В. Золотухин.* Основы построения интеллектуальной многоуровневой системы управления воздушным движением на основе концепции Free Flight // Материалы XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС’2011), 25-31 мая 2011 г. Алушта. – М.: Изд-во МАИ, – С. 749-751.
3. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е.* Интеллектное управление динамическими системами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 352 с.Международной
4. *Bellomi F., Bonato R., Nanni V., Tedeschi A.* Satisficing Game Theory for distributed conflict resolution and traffic optimisation: a simulation tool and experimental results // Eurocontrol Innovative Research Workshop, 2007.
5. *Ярошевский В.А., Бобылев А.В., Гайфуллин А.М., Свириденко Ю.Н*. Влияние вихревого следа на динамику полета пассажирского самолета // Полет. – 2009. – вып. ЦАГИ-90. – С. 93–99.

6. *И.А. Каляев*. Проблема группового управления и пути ее решения. Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика и управление движением», посвященной 105-летию Н.Г. Четаева – Иркутск, Т.1, С. 80-87.

Управление выполнением ресурсоемких заданий в условиях неопределенности

Ю.Е. Малашенко, И.А. Назарова

ВЦ РАН им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

В современной практике применения высокопроизводительных вычислительных систем большую группу составляют потоковые задачи обработки информации. При формальном подходе вычислительное задание для каждой из них состоит в следующем: из большого набора данных требуется выделить фрагмент с определенными, уникальными свойствами. Когда в процессе просмотра данных удается выявить искомый фрагмент, говорят, что задача обработки информации решена, и выполнение задания прекращается. Если же в ходе вычислительного процесса приходится просматривать весь массив, и по-пытки найти уникальный фрагмент терпят неудачу, то задание считается выполненным, а поставленная задача не решенной, так как цель не достигнута.

Далее будет рассматриваться класс ресурсоемких задач обработки информации, допускающих распараллеливание по данным. В процессе их выполнения возникает объективная неопределенность, связанная как с длительностью поиска, так и с потен-циальной возможностью получить решение. Специальный класс задач, обладающих означенными выше свойствами, в [1] определен как citu-задания, citu-задачи (от английского термина computationally intensive task (under) uncertainty, который можно перевести как ресурсоемкое вычислительное задание, выполняемое в условиях неопределенности).

Для решения citu-задач используются Гриды или гетерогенные высокопроизводительные специализированные вычислительные системы (СВС). В слу-чае, когда СВС способна обрабатывать несколько разнородных citu-задач одновременно, при планировании вычислительных работ возникает научно-техническая проблема, которая заключается в отыскании способов эффективного распределения разнотипных ресурсов между различными заданиями [2].

Проблема управления состоит в следующем. Диспетчеру специализированной системы, состоящей из большого числа разнотипных вычислительных модулей, взаимосвязанные пользователи в случайные моменты времени предоставляют для решения разнородные citu-задачи. Все задания должны быть завершены все вместе и каждое в отдельности как можно быстрее, но не позднее определенного срока.

Массив исходных данных для каждой из citu-задач состоит из одинаковых по размеру отдельных неделимых содержательно значимых фрагментов и становится извес-тен после анализа задачи на входе СВС. Выполнение отдельной citu-работы прекращает-ся, когда уникальный фрагмент обнаружен или если просмотрен весь массив, но ничего найти не удалось. Считается, что архитектура вычислительной системы позволяет просматривать наборы фрагментов каждого citu-задания в произвольном порядке, в том числе параллельно, т.е каждая часть данных может обрабатываться независимо от других.

Диспетчер-планировщик, управляющий работой СВС в в реальном времени, должен:

- эффективно использовать разнотипные вычислительные устройства и добиваться максимальной производительности СВС при выполнении разнородных заявок;
- завершать каждое задание до наступления назначенного (предписанного) срока;
- в условиях неопределенности распределять вычислительные ресурсы с учетом реальных, фактически необходимых затрат, требуемых для решения конкретной задачи.

Таким образом, проблема управления выполнением citu-заданий по сути является динамической и многокритериальной, а также имеет случайные, априори неизвестные параметры (время поступления заданий в систему, длительность их обработки и потенциальное наличие решения). Для ее решения предлагается использовать многоэтап-ную оптимизацию и пошаговую динамическую схему скользящего планирования, в рамках которой:

- непрерывный динамический процесс выполнения citu-заданий разделяется на отдельные плановые интервалы контрольными точками принятия решения, что обусловлено как вычислительной спецификой задач, так и требованиями пользователей;
- все вновь поступившие задания, наряду с находящимися в обработке, сразу вклю-чаются в список выполняемых, а при распределении ресурсов - учитываются как собст-венные характеристики каждой задачи, так и суммарная загрузка системы. Диспетчер-планировщик должен принимать во внимание совместные интересы всех пользователей. Действительно, все задания в определённом смысле персонифицированы: они равнознач-ны, а пользователи, предоставляющие задачи для обработки,

равноправны в рамках пра-вил распределения вычислительных ресурсов. Поэтому стратегии управления выполнени-ем не должны быть дискриминирующими по отношению к той или иной группе заявок;

- все задания выполняются в реальном времени, поскольку содержательное реше-ние может утратить актуальность, если будет получено слишком поздно. В группе обраба-тываемых могут находиться взаимосвязанные задачи, решения которых, если они сущест-вуют, нужны одновременно и все вместе. Другими словами в условиях неопределенности возникает своеобразная задача быстродействия с зачётом по последнему участнику, пересекшему финишный створ до наступления назначенного срока;

- разработана модель процесса принятия решений при динамическом управлении СВС. Модель опирается на методы оптимизации и принцип гарантированного результата. С ее помощью определяется распределение вычислительных ресурсов, позволяющее достигать максимальной суммарной производительности вычислительной системы для конкретного набора задач и минимизировать задержки в их выполнении.

На практике при использовании предложенной модели в первую очередь решаются задачи с небольшим абсолютным временем выполнения, а при пакетной обработке все задания, не содержащие уникальных фрагментов, завершаются в последнюю очередь. В случае возможного нарушения директивных сроков окончания осуществляется релейное переключение на обработку соответствующих заданий.

Для реализации принципов, заложенных в основу математической модели, была разработана и программно реализована трехуровневая система планирования и диспетче-ризации ресурсоемких разнородных вычислений в гетерогенной высокопроизводительной СВС [3].

Список литературы

1. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Модель управления разнородными вычислительными заданиями на основе гарантированных оценок времени выполнения // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 4. С. 29-38.

2. *Голосов П.Е., Козлов М.В., Малашенко Ю.Е. и др.* Анализ управления специализированными вычислительными заданиями в условиях неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 1. С. 50-66.

3. *Купалов-Ярополк И.К., Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Ронжин А.Ф.* Модели и программы для системы управления ресурсоемкими вычислениями. М.: ВЦ РАН, 2013.

Использование методов экспериментальной экономики в исследовании операций

И.С. Меньшиков, О.Р. Меньшикова, А.Н. Чабан

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

В 2003 году была создана Лаборатория экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН (ЛЭЭ). На базе ЛЭЭ проводится годовой курс по экспериментальной экономике для студентов старших курсов МФТИ, а также выполняются прикладные проекты. Курс по экспериментальной экономике ведется после курса по теории игр. Часто на обоих курсах исследуются одни и те же задачи, но изучаются они по-разному. Теория игр отвечает на вопрос, какая стратегия является оптимальной, если считать всех игроков одинаково рациональными. На занятиях по экспериментальной экономике предполагается посадить всех присутствующих за компьютеры и дать им возможность многократно с разными партнерами и различными параметрами проиграть эту игру, а потом посмотреть, что же из этого получилось. Цель состоит в том, чтобы объяснить наблюдаемое поведение участников, сравнить его с предсказаниями теории игр, отработать методы прогноза результатов аналогичных экспериментов в будущем, выяснить причины различного поведения участников. Исследования по экспериментальной экономике являются междисциплинарными и ведутся на стыке теории игр, психологии и физиологии.

В среднем за год студенты участвуют в 30 различных экспериментах. Покажем на примере одного из первых экспериментов, какой круг вопросов обсуждается при анализе экспериментов. Рассмотрим простейший сетевой аукцион STB (Seller-Transporter-Buyer) с тремя участниками от 1.03.2013. Заметим, что такого сорта эксперименты проводятся каждый год, поэтому имеется возможность исследовать не только то, что произошло в этом году, но и сравнить полученные результаты с теми, которые мы наблюдали в предыдущие годы.

Суть игры состоит в следующем. При каждом повторении игры (в каждой попытке) игроки случайным образом объединяются в тройки и получают роль продавца, транспортировщика или покупателя. От попытки к попытке тройки и роли меняются. Каждый участник получает свой приватный параметр: для продавца и транспортировщика это затраты (c_s и c_t , соответственно), а для покупателя

это выкупная стоимость v_b, по которой у него гарантированного выкупят единицу товара. Тем самым определяется «пирог» $v_b - c_s - c_t$, который им предлагается делить на троих. Как они это делают? Продавец (транспортировщик) назначает цену p_s (p_t), по которой он готов продать (перевезти) единицу товара, $p_s \ge c_s$ ($p_t \ge c_t$), а покупатель назначает цену $p_b \le v_b$, по которой он готов купить единицу товара. Делают они это одновременно и независимо друг от друга на основе известных только им приватных параметров. Всем игрокам известно только то, что приватные параметры для продавца, транспортировщика и покупателя равномерно распределены на отрезках [0,20], [0,10] и [30,100], соответственно.

Далее определяется $\Delta = p_b - p_s - p_t$. Дельта свидетельствует о том, происходит сделка или нет. Отрицательная дельта показывает, что требования игроков являются несовместимыми и сделка не происходит. Все участники этой сделки получают нулевой выигрыш. Если дельта неотрицательна, то каждый участник сделки получает запрашиваемую маржу $(p_s - c_s, p_t - c_t, v_b - p_b)$, к которой добавляется $\Delta / 3$. Таким образом, стратегией игрока является функция от его приватного параметра; кроме того, ему доступна полная информация о прошлых попытках. После каждой попытки раскрывается информация о том, какие приватные параметры были у партнеров, и какие цены они выбрали.

Ясно, что роли продавца и транспортировщика похожи и отличаются только параметрами, а роль покупателя можно свести к роли продавца, введя затраты покупателя $c_b = 100 - v_b$ и попросив его назначить цену $p'_b \ge c_b$, где $p'_b = 100 - p_b$. Это ясно в теории, но как поведут себя участники реального эксперимента заранее предугадать довольно сложно. Поэтому мы провели два эксперимента – STB и STBa; в последнем эксперименте роли игроков симметричны.

В каждом эксперименте было 20 попыток, участвовал 21 студент. Протоколом эксперимента является матрица, в которой 420 строк и 20 столбцов. По ней однозначно восстанавливается все, что произошло в эксперименте. На сайте в Интернете, где ведется учет активности студентов, выкладываются эти матрицы, и студентам предлагается к следующему занятию проанализировать агрегированное, индивидуальное и личное поведение в экспериментах, ответив на следующие вопросы.

Агрегированное поведение

1. Найти равновесие Байеса-Нэша для данного сетевого аукциона, в котором все три игрока подают заявки с некоторой постоянной для себя ценой, если только это возможно при текущем значении приватных параметров.
2. Сравнить суммарный выигрыш всех участников с теоретическим максимумом (искренние стратегии). Есть ли динамика эффективности по периодам?
3. Оценить вероятность сделки в зависимости от размера «пирога» ($v_b - c_s - c_t$ или $100 - c_b - c_s - c_t$).
4. Построить индивидуальные и агрегированные стратегии покупателей и продавцов как функции от v_b (или c_b), c_s и c_t, соответственно.
5. В чем отличие STB и STBa с точки зрения теории игр и по результатам экспериментов?
6. Какова средняя цена сделки для покупателей, продавцов и транспортировщиков по периодам?
7. Каким, по-вашему, является справедливый дележ суммарного выигрыша при условии полной информации о приватных параметрах?
8. Каким, по-вашему, является справедливый дележ суммарного выигрыша при заданной неполной информации о приватных параметрах?

Индивидуальное поведение

1. Дать свои предложения по характеристикам индивидуального поведения участников.
2. Посчитать, сколько раз каждый участник был в каждой из трех ролей.
3. Сравнить реальный выигрыш каждого игрока со средним потенциальным выигрышем (вектор средних выигрышей по роли скалярно умножаем на количество попыток, сыгранных участником в данной роли) и максимальным возможным выигрышем, который соответствует нулевой дельте.
4. Для каждого участника оценить среднее значение:

- дельты в сделках с его участием;
- маржи и выигрыша в роли продавца, транспортировщика, покупателя;
- доли в заключенных сделках;
- доли возможных, но не состоявшихся по его вине сделок;
- c_s и $p_s(c_s)$ – ставки при заданных значениях затрат продавца;
- c_t и $p_t(c_t)$ – ставки при заданных значениях затрат транспортировщика;
- v_b (или c_b) и $p_b(v_b)$ ($p_b(c_b)$) – ставки при заданных значениях стоимости (затрат) покупателя.

5. Можно ли разбить всех участников на небольшое количество однородных кластеров по характеристикам индивидуального поведения?
6. Существует ли связь между поведенческими и психологическими характеристиками участников эксперимента?
7. Придумать эффективные способы визуализации полученных результатов.

Личное поведение

1. Построить свою стратегию в роли продавца, транспортировщика и покупателя.
2. Дать краткое словесное описание своего поведения во время эксперимента.
3. Привести соображения по улучшению личной стратегии и по возможности ее автоматизации.

Для ответа на вопрос о связи поведенческих и психологических характеристик используется созданный в ЛЭЭ сайт психологического тестирования. В нем 6 модулей (по 4 теста в каждом модуле). На этом сайте прошло тестирование более 10 000 человек, в том числе все обучающиеся студенты. Ведется систематическая работа по сопоставлению индивидуальных поведенческих и психологических характеристик участников экспериментов [1-3].

Список литературы

1. *Лукинова Е.М., Меньшикова О.Р.* Результативность участников лабораторных рынков в зависимости от их психологических типов. Сборник научных трудов МФТИ «Модели и методы обработки информации», М. 2009. С. 175-185.

2. *Меньшикова О.Р., Мороз И.И., Талачева Е.И.* Влияние психологического типа участника лабораторных рынков на его поведение в социально-экономических экспериментах. Сборник научных трудов МФТИ «Модели и методы обработки информации», М. 2009. С. 161-174.

3. *Двуреченская М.А., Меньшикова О.Р.* Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками. Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». М. 2010. С. 93-104.

Методы оптимизации использования каналов связи в системах коллективного доступа к сети Интернет*

И.С. Меньшиков, Р.И. Яминов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

В качестве основной проблемы, препятствующей достижению максимальной коммерческой эффективности канала в действующих сетях, рассматривается неравномерность его загрузки, приводящая к:

- снижению активности абонентов (вплоть до ухода из сети) в периоды перегрузки канала;
- «простоям» канала в периоды низкой активности абонентов.

Задачей работы является разработка новых подходов к организации управления каналом связи, минимизирующих длительность периодов перегрузки и простоя канала и обеспечивающих постоянное поддержание его загрузки на уровне, близком к 100%.

Инновационность решения заключается в использовании принципиально нового подхода к управлению каналом связи (новой парадигмы), в рамках которого абоненты оператора включаются в контур управления, а уровень востребованности сервиса и факторы удовлетворённости абонентов становятся входными параметрами алгоритма управления каналом.

Продукт реализуется на практике в компании Радуга-Интернет в форме комплекса программных средств (серверная и клиентская компоненты, специализированный протокол взаимодействия), позволяющего:

- абонентам – наглядно видеть уровень текущей и перспективной (прогнозной) загрузки канала связи и оперативно принимать решения, связанные с выбором оптимального времени/способа потребления услуг и соотношения стоимость/качество сервиса;
- оператору – гибко управлять «правилами игры», в рамках которой абоненты должны будут принимать свои решения.

В рамках нового подхода абонентам предоставляется возможность:

- Получать информацию о доступности канала связи

* Работа выполнена при финансовой поддержке Инновационного центра «Сколково» и гранта РФФИ 12-01-31258 мол_а.

- в текущий момент (для понимания ситуации, в которой он находится);
- в перспективе (для планирования своей деятельности);
- в истории (для улучшения качества/обоснованности планирования).

• Планировать свою активность в сети, исходя из текущей и перспективной доступности канала связи

• Просто и быстро декларировать свои потребности и предпочтения

• Формировать сигналы о своей удовлетворённости в режиме реального времени

• Кооперировать с оператором и другими абонентами в целях повышения качества получаемых услуг

Подход к управлению каналом связи как социо-технической задаче открывает оператору доступ к новым массивам знаний о своих абонентах, а также предоставляет в его распоряжение эффективные инструменты влияния на поведение абонентов, позволяющие решить задачу перераспределения (выравнивания) загрузки канала и повышения его экономической эффективности.

Предложенный алгоритм исследовался в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ [1], была предложена модель, описывающая процесс взаимодействия оператора сети интернет и его абонентов. Изучались последствия, к которым может привести предоставление абонентам возможности получения информации о состоянии канала и оперативного переключения между тарифами. Дополнительной целью работы было создание исследовательской платформы, на которой можно было бы проводить изучение различных алгоритмов распределения канала в интересах операторов связи.

Для проведения исследований в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ была написана программа сетевого взаимодействия оператора сети интернет и его абонентов, которая была использована для проведения экспериментов. Всего было проведено 24 эксперимента, в них приняли участие более 100 студентов МФТИ [2].

Исследовалось два алгоритма распределения канала: пропорциональный (существующий) и приоритетный (новый). Оба алгоритма изучались в условиях свободного канала, обычной и пиковой загрузки канала.

Для моделирования работы в сети интернет пользователей с различными предпочтениями были использованы три типа абонентов, которые различались отношением к скорости скачивания файлов и цене за мегабайт. Предварительное психологическое тестирование всех участников экспериментов показало обоснованность выделения этих типов абонентов.

Проведенные исследования показали, что предоставление абонентам возможности получения информации о состоянии канала и оперативного переключения между тарифами может привести к увеличению выигрыша оператора и удовлетворенности абонентов. Увеличение выигрыша оператора происходит за счет оптимизации заполнения канала и увеличения количества загруженных файлов, что также приносит дополнительный выигрыш и абонентам, причем, растет не только суммарный выигрыш всех абонентов, но и в 90% случаев при переходе от одного этапа информированности к другому растет выигрыш каждого отдельного абонента.

Была исследована чувствительность результатов экспериментов к ширине полосы, приходящейся на каждого пользователя. Показано, что возможность переключения тарифов не приводит к резкому падению выручки оператора для обоих алгоритмов распределения канала.

Список литературы

1. *Яминов Р.И., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р.* Исследование взаимодействия оператора сети Интернет и его абонентов с помощью методов экспериментальной экономики. // Математическое моделирование информационных систем. – М.: МФТИ, 2012. – С. 92–103.

2. *Золотарев А.А., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Яминов Р.И.* Новый подход к управлению загрузкой канала передачи данных в сети интернет с использованием экспериментальной экономики. Анализ серии экспериментов. // Труды 54-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. Том 1. – М.: МФТИ, 2011. – С. 80–82.

Решение несобственных задач регрессии и классификации на основе методов коррекции

О.В. Муравьёва

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

Рассматривается задача построения функции $\phi: X \to Y$ по конечному набору точек (обучающей выборке) $(x^1,y^1),\ldots,(x^m,y^m)$. Фиксируется некоторый класс функций Φ, и в этом классе требуется найти функцию, удовлетворяющую условию

$$y^i = \phi(x^i),\ i = 1,\ldots,m,\ \phi \in \Phi. \qquad (1)$$

Такая задача распознавания (обучения) может быть несобственной. Кроме того, условия могут иметь приближенный характер в силу неточного задания параметров. В этом случае рассматривается задача оптимальной коррекции (аппроксимации): найти функцию, которая вместе с некоторым набором параметров $[X_H,y_h]$, удовлетворяет условию (1), и данный набор параметров является «ближайшим» к $[X,y]$ среди всех допустимых параметров. Под допустимыми понимаются параметры, при которых задача (1) является собственной, возможны также дополнительные условия. Набор параметров задачи имеет естественную матричную структуру, и критерием «близости» является какая-либо матричная норма. Соответствующая задача коррекции имеет вид:

$$\inf_{\phi\in\Phi, X_H, y_h} \left\{ \left\| [X_H, y_h] - [X, y] \right\| : y_h^i = \phi(x_H^i), i = 1,\ldots,m \right\}.$$

Примеры использования такого подхода приведены в [1]-[3]. Предлагаются методы решения такой задачи для двух частных случаев при разных X,Y и Φ.

Для задачи регрессии, в которой и пространство ответов Y, и пространство признаков X являются числовыми ($X = R^n$, $Y = R$), а Φ – скалярные аффинные функции нескольких переменных, получено решение через собственный вектор матрицы данных обучающей выборки.

Аналогичные методы применяются к задаче классификации: пространство признаков по-прежнему $X = R^n$, а пространство ответов дискретно (номер класса), в простейшем случае $Y = \{0,1\}$). Неизвестная функция φ (решающее правило) – линейная пороговая функция n переменных. Если обучающая выборка не является линейно разделимой, предлагается строить решающее правило для собственной задачи, ближайшей к данной. Для разных критериев (квадратичных или кусочно-линейных) решение сводится к системе задач квадратичного или линейного программирования.

Для разделимой обучающей выборки рассматривается задача определения наиболее устойчивого решения. Пусть в пространстве признаков существует разделяющая гиперплоскость, не проходящая через точки обучающей выборки. Рассматривается задача определения гиперплоскости, которая остается разделяющей при наибольшем изменении информационной матрицы обучающей выборки. Предлагаемый подход к решению состоит в том, что коэффициенты уравнения этой разделяющей гиперплоскости $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ являются самым устойчивым решением системы неравенств.

Список литературы

1. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Матричная коррекция данных в задачах оптимизации и классификации. // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2004. С.21–32

2. *Муравьева О.В.* Робастность и коррекция линейных моделей // Автоматика и телемеханика. 2011. № 3. С 98–112.

3. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации. М.: ВЦ РАН, 2012.

Размытое равновесие Байеса-Нэша в играх двух игроков

М.В. Мурашкин

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

В работе анализируются результаты нескольких экономических экспериментов, проведенных за последнее время в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ. Каждый из рассматриваемых экспериментов представлял собой многократное повторение байесовской игры двух игроков с независимыми типами. Общей особенностью экспериментов является плохое соответствие усредненных действий реальных игроков и теоретического равновесия Байеса-Нэша. Для одного из экспериментов подобное несоответствие подробно описано в [1]. Была выдвинута гипотеза, что в рассматриваемых

экспериментах причиной несоответствия является неточное знание игроками стратегий противников при известных частотах встречаемости действий.

Для формализации этого неточного знания было разработано понятие размытого равновесия Байеса-Нэша. Оно может быть посчитано для произвольной байесовской игры нескольких игроков с независимыми типами. В этом равновесии каждый игрок i выбирает свой наилучший ответ s_i не на истинный набор s_{-i} стратегий противников, а на некоторое их «размытие» - набор смешанных стратегий $\tilde{s}_{-i}$, в котором под стратегией игрока j понимается смешанная стратегия $\alpha_i \sum_k p_{jk} a_{jk} + (1-\alpha_i) s_j$. Здесь p_{jk} - вероятность игрока j выбрать действие A_{jk} в соответствии со своей истинной стратегией s_j, a_{jk} - стратегия, состоящая в выборе игроком j действия A_{jk} вне зависимости от своего типа t_j, α_i - коэффициент, характерный для игрока i, его степень размытия.

Оказалось, что для каждой из рассматриваемых в работе игр существует целое множество размытых равновесий, не совпадающих с обычным равновесием Байеса-Нэша. Также было выяснено, что усредненные действия игроков в экспериментах попадают в эти множества, т.е. могут быть интерпретированы (при определенных коэффициентах α_i) как размытые равновесия Байеса-Нэша.

Список литературы

1. *Мурашкин М.В.* Равновесие в игре FIGHT: теория и эксперимент // Математические модели и задачи управления: сб. науч. тр. / Московский физико-технический институт. – М., 2011. – С.127-136.

Анализ данных образования и патентной активности с использованием методов анализа паттернов

А.Л. Мячин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Данная работа посвящена весьма актуальной на сегодняшний день проблеме, а именно совместному анализу данных образования и патентной активности. Анализ проведен в 37 странах мира (включая Российскую Федерацию) по таким показателям, как: численность приёма в начальное, среднее и высшее образование, численность преподавательского состава в системах среднего и высшего образования, а также патентной активности в данных странах.

Для проведения необходимого анализа использован сравнительно молодой и перспективный способ анализ данных – метод анализа паттернов. Данный метод построен по принципу поиска взаимосвязей между объектами, отражающих их признаковое описание, построением их классификации и проведением динамического анализа. Другими словами, начальное множество объектов разбивается на ряд подмножеств, называемых паттернами, при условии, что объекты каждого паттерна имели схожие характеристики, а различные паттерны существенно отличались между собой.

Данный метод был выбран в связи с рядом его преимуществ перед классическими методами (такими, как ранжирование), имеющими важно значение для совместного анализа данных образования и патентной активности различных стран, такими, как соотношение в один паттерн объектов, имеющих существенно разные количественные характеристики, но схожую структуру как самих внутренних показателей, так и их взаимосвязей. К примеру, если характеризовать один объект данными (3; 10; 5), а второй (30; 100; 50), то, при использовании ряда классических методов кластерного анализа, данные объекты попадут в различные классы. Однако, очевидно, имея различные количественные характеристики, данные объекты имеют схожую внутреннюю структуру, а именно: все показатели второго объекта являются результатом умножения первого на 10. Метод анализа паттернов объединит такие схожие объекты в один паттерн. Динамическая часть анализа, при котором формируются различные динамические группы, позволяет не только находить определённый тренд развития, но также выявлять неявные взаимосвязи между индикаторами и нетипичную динамику исследуемых объектов, что представляет большой интерес для экспертного анализа.

Сам процесс анализа состоит из 3-х этапов, каждый из которых делится на несколько подэтапов:

1. Начальный этап;
1.1 Моделирование начальной системы показателей;
1.2 Сбор данных;
1.3 Качественная проверка найденных данных;
1.4 Проведение корреляционного анализа используемых данных;
1.5 Агрегирование данных;
1.6 Составление базовой системы показателей.

2. Аналитический этап;

2.1 Построение объектов в виде определённых функций (в данной работе используются кусочно-линейные функции);

2.2 Проведение кластеризации;

2.3 Интерпретация результатов кластеризации.

3. Динамический этап анализа;

3.1 Построение траекторий, выражающих развитие объектов во времени;

3.2 Выявление динамических групп.

Ранее, метод анализа паттернов был успешно применен при решении ряда задач прикладного характера в области политики [5], менеджмента и управления персоналом [3,4,5], макроэкономики [1,2] и анализа банковской сферы [5,6].

Объектами исследования в данной работе являются 37 стран мира, а именно: Болгария, Бельгия, Чешская республика, Дания, Германия, Ирландия, Греция, Испания, Франция, Италия, Кипр, Латвия, Лихтенштейн, Люксембург, Мальта, Норвегия, Австрия, Португалия, Румыния, Словения, Финляндия, Швеция, Великобритания, Ирландия, Норвегия, Хорватия, Турция, Российская Федерация, Канада, США, Мексика, Китай, Индия, Сингапур, Австралия и Новая Зеландия. Цель работы – отражение не только взаимосвязей, но и сложившейся ситуации, касающейся начального, среднего и высшего образования, а также патентной активности в странах. Данные исследуются в промежутке 1979 – 2006 гг.

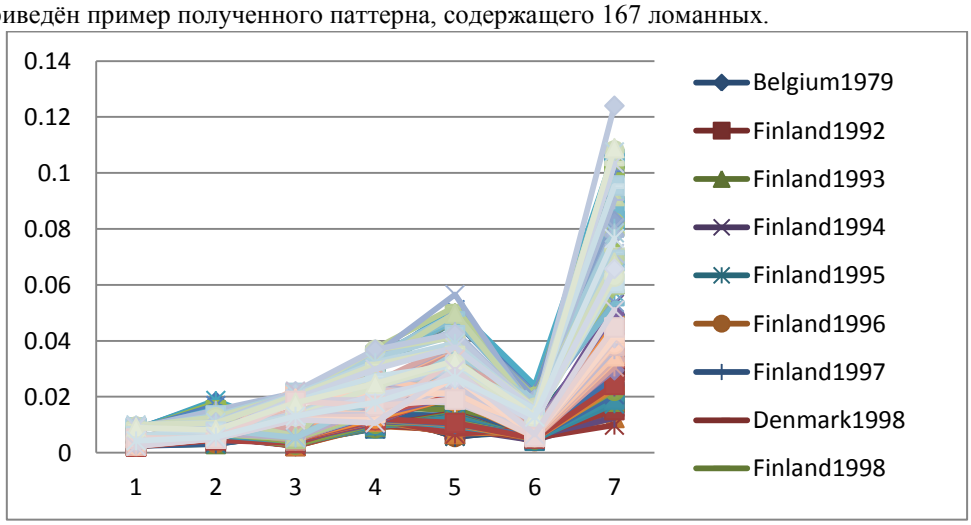
Исходными данными можно разделить на два блока:

1. Образовательный потенциал страны, характеризующийся количественными соотношениями учеников начального и среднего образования, студентов высшего образования, а также количества учителей и профессорско-преподавательского состава;

2. Патентная активность в странах, характеризующаяся количественными соотношениями поданных и выданных заявок на патенты в странах.

В результате анализа было выявлено ряд паттернов, содержащих кусочно-линейные функции, характеризующие взаимосвязи выбранных параметров по каждой из выделенных стран. Всего исследовалось 1036 кусочно-линейных функций.

Далее приведён пример полученного паттерна, содержащего 167 ломанных.



Список литературы

1. *Aleskerov F., Alper C.E. Inflation* Money, and Output Growths: Some Observations // Bogazici University Research Paper, #SBE 96-06, 1996.

2. *Aleskerov F., Alper C.E.* A clustering approach to some monetary facts: a long-run analysis of cross-country data // The Japanese Economic Review, v.51, no.4, 2000, 555-567.

3. *Aleskerov F., Ersel H., Gundes C., Minibas A., Yolalan R.* Environmental Grouping of Bank Branches and their Performances // Yapi Kredi Discussion Paper Series, No: 97-03, 1997, Istanbul, Turkey

4. *Aleskerov F., Ersel H., Gundes C., Yolalan R.* A Multicriterial Method for Personnel Allocation among Bank Branches // Yapi Kredi Discussion Paper Series, No:98-01, 1998, Istanbul, Turkey.

5. *Aleskerov F., Ersel H., Yolalan R.* Multicriterial Ranking Approach for Evaluating Bank Branch Performance // International Journal of Information Technology and Decision Making, v.3, no.2, 2004, 321-335.

6. *Алексашин П.Г., Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Попова Е.С., Солодков В.М.* Динамический анализ бизнес-моделей российских банков в период 2006–2009 гг. Препринт WP7/2012/03; НИУ ВШЭ, М., 2012, 64 с.

Методы решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети

И.А. Назарова

ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, РАН, Москва, Россия

Математические задачи анализа уязвимости сетевых систем возникают в связи с необходимостью априорной оценки последствий произвольных неслучайных разрушающих воздействий таких, как масштабные аварии, техногенные катастрофы, военные действия и террористические атаки, на реальные территориально-распределенные системы: топливно-энергетические комплексы, сети связи и управления, Интернет и др.

В докладе рассматривается потоковая задача анализа уязвимости многопродуктовой сети (МП-сети). В такой сети предполагается наличие нескольких невзаимозаменяемых "видов" продуктов, которые не могут перемешиваться или перераспределяться между другими пользователями (например телефонная сеть). Под анализом уязвимости понимается исследование определенных функциональных характеристик МП-сети в зависимости от ухудшения показателей работоспособности ее элементов или при полном разрушении последних.

Для оценки уязвимости системы моделируется разрушение МП-сети, ее ребер или вершин. Далее требуется оценить потери, которые несут разделенные пользователи МП-сети. В частности при изучении потоковой задачи анализа уязвимости предполагается, что из строя выходят (полностью) одна или несколько, заранее неизвестно каких вершин (узлов) МП-сети, так, что передача потока для хотя бы одного вида продукта становится невозможной. При этом исследуются характеристики уязвимости, связанные с потерями разделенных пользователей МП-сети, а именно – с количеством требований на передачу потоков, которые не выполняются вследствие разрушения системы.

Для решения задачи используется теоретико-игровая модель "оборона против нападения", анализ уязвимости означает получение гарантированных оценок ущерба пользователей при неточно известных заранее внешних воздействиях, и предполагает поиск вершин МП-сети, полное уничтожение которых приводит к максимальному ущербу пользователей.

Выбор методов решения задачи производится исходя из ограничений, наложенных на мощность удара. Некоторые частные случаи задачи исследуются с помощью потоковых и теоретико-графовых методов. Для остальных случаев при построении точного решения задачи анализа уязвимости МП-сети предлагается использовать разработанную в [1] и расширенную в [2] методологию построения решения как несократимого вершинного разреза.

Список литературы

1. *Назарова И.А.* Модели и методы анализа многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2004.

2. *Назарова И.А.* Вершинный вариант лексикографической задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети. М.: ВЦ РАН, 2010.

О подходах к построению дополнительных оснований в принятии экономических решений

О.А. Попова

СФУ, Красноярск, Россия

1. Введение

Задачи принятия экономических решений характеризуются высоким уровнем неопределенности. Оценивая важность и специфические особенности такой неопределенности, многие исследователи выделили особый класс неопределенностей, назвав его экономической неопределенностью [1,2]. Специфика сложности исследования экономических систем обусловливается рядом факторов, которые с некоторой степенью общности можно отнести к трем основным группам. Первая группа обусловливается внутренней сложностью системы как таковой. Вторая – внешней неопределенностью и случайным характером явлений и процессов, влияющих на систему и взаимодействующих с ней. Третья группа факторов связана с разрабатываемыми и применяемыми методами анализа систем и численными подходами к оценке ее экономических показателей, которые в настоящее время отличаются достаточной сложностью. Поэтому актуальной является проблема разработки эффективных численных методов принятия решений в условиях недостатка эмпирических данных и высокого уровня неопределенности. Это очень сложная проблема, так как при разработке численных методов расчета, повышающих эффективность одних характеристик системы, могут быть установлены дополнительные неопределенности, которых нет в изначальной экономической постановке. Для того чтобы получить

возможность лучше справляться с экономическими неопределенностями, рассматривались различные процедуры представления экономической неопределенности, например, с помощью интервалов, нечетких множеств и вероятностей [3]. В данной статье рассматриваются некоторые подходы, позволяющие получить на основе неполной или (и) неопределенной информации дополнительные основания для принятия решений. На основе численного вероятностного анализа предлагается метод построения плотностей вероятности возможных решений, который применяется для задачи оценки показателей инвестиционного проекта.

2. Принцип дополнительного основания

В настоящее время во многих работах, посвященных исследованию систем в условиях неопределенности, используется подход, который в зарубежных источниках получил название «propagation of uncertainty» [1-3]. В дословном переводе на русский язык это звучит как «распространение неопределенности». Анализируя содержательный смысл этого понятия, мы пришли к выводу, что оно связано с важным аспектом работы с неопределенными данными, а именно проблемой получения дополнительных оснований в условиях неполной информации для принятия решений. Выделим две важных составляющих данного аспекта. Первая составляющая определяется недостатком эмпирической информации и неопределенностью, содержащейся в данных. Вторая составляющая связана с фактом неизвестности функции распределения входных параметров. Рассмотреть данные составляющие неопределенности можно с позиции принципа недостаточного основания (или принципа индифферентности), который непосредственно связан с принципом достаточного основания Лейбница. Если же подобного достаточного основания не находится, то тогда в некоторых случаях делаются определенные выводы, соответствующие принципу недостаточного основания. Другими словами, если исследователь находится в условиях недостаточности или полного отсутствия эмпирической информации или оснований для выдвижения идей и предположений о неизвестном распределении входных параметров, то необходимо распространить (propagate) существующую неопределенность, чтобы получить достаточные выводы в соответствии с принципом недостаточного основания. Такую возможность, исследователю предоставляет другой принцип, а именно, принцип максимальной энтропии, который в рамках оценки неизвестных вероятностных распределений можно сформулировать так: “Если необходимо получить необходимые основания для оценки или восстановления неизвестного входного распределения на основе неполной, неточной информации, то следует опираться на такое распределение вероятностей, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую уже имеющейся априорной информацией”. При этом важно следовать принципу: выбрать тип представления в соответствии с количеством имеющейся информации и оставаться верным имеющейся информации, включая информационные пробелы. Применение принципа недостаточности (достаточности) оснований позволяет существенно расширить формы представления неопределенностей. Например, p-боксы [1], облака [2], теория Демпстера-Шафера [3-4], интервальные гистограммы, гистограммы второго порядка [5-6].

3. Подходы к построению дополнительных оснований

В рамках рассмотренных принципов “распространение неопределенности” можно достичь, например, используя метод вероятностных границ (Probability bounds). Его основная идея приводится, например, в работе [1], и состоит в следующем: “Есть нечто, что можно сказать о неизвестном распределении. В частности, его кумулятивная функция распределения вероятностей или CDF (Cumulative Distribution Function) должна лежать в обрасти – ящике (box), ограниченная нулем и единицей по вертикали и от мин и макс горизонтально. Истинная функция распределения, какой бы она ни была, должна находиться в этом области”. Идея построения вероятностных границ оказалась весьма продуктивной и нашла свое применение в такой форме представления неопределенности, как p-боксы (p-box Фэрсона Скотта). Еще одним подходом к распространению неопределенности являются Облака Неймайера (Neumaier’s clouds) , которые позволяют представить неполную стохастическую информацию четким, понятным и вычислительно привлекательным способом, а также позволяют визуализировать неопределенность и обладают четкой семантикой, выступая посредником между понятием нечеткого множества и вероятностным распределением. В рамках основных подходов к распространению неопределенности следует указать также на математическую теорию очевидностей (свидетельств) Демпстера-Шафера, основанную на функции доверия (belief functions) и функции правдоподобия (plausible reasoning), которые используются, чтобы скомбинировать отдельные части информации (свидетельства) для вычисления вероятности события. Данная теория позволяет построить необходимые основания в условиях неопределенности, путем оценки верхней и нижней границы интервала возможностей. Далее рассмотрим еще один способ распространения неопределенности для получения дополнительных оснований в условиях ограниченности эмпирической информации и неопределенности имеющихся данных, а именно, гистограммный подход. В тех случаях, когда нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины задают оценки плотности распределения сверху и снизу. Такие оценки удобно аппроксимировать интервальными гистограммами [6].

4. Гистограммы второго порядка

Гистограммы второго порядка являются еще одним способом распространения неопределенности. Данный подход разработан в рамках численного вероятностного анализа [5], как метод распространения элиторной и эпистемистической неопределенности. Он также выявляет дополнительные основания для распространения неопределенности, но в отличие от приведенных выше форм ее представления, наряду с основанием, в виде вероятностных границ или интервальных гистограмм, позволяет получать дополнительную информацию о неизвестной функции плотности вероятности внутри области.

Определим гистограмму второго порядка (ГВП) как кусочно-гистограммную функцию (т. е. такие гистограммы, каждый столбец которых – гистограмма). ГВП так же как обычная гистограмма определяется сеткой $\{z_i, i = 0,1,\ldots n\}$ и набором гистограмм $\{P_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$. На каждом отрезке $[z_{i-1}, z_i]$ ГВП принимает постоянное гистограммное значение [6].

Рассмотрим применение данного подхода к решению задачи оценки инвестиционного проекта, когда компания принимает решение о приобретении для последующего производства патента нового лекарственного препарата. В данном случае мы имеем дело с высоким уровнем рыночной неопределенности, поэтому стандартная финансовая модель не может дать достаточных для принятия решения результатов. Для одновременного учета неопределенности в цене, продажах, себестоимости и издержках применяется численный вероятностный анализ. Основные параметры финансовой модели моделируются как случайные переменные, имеющие соответствующее вероятностное распределение. Решение принимается на основе анализа рассчитанных показателей NPV и IRR.

Из анализа гистограмм NPV и IRR (см. рис. 1 ниже) видно, что вероятны как крайне негативные исходы, так и возможна значительная прибыль в сравнении со стандартным анализом. ЛПР позволяет увидеть возможные варианты негативных исходов реализации проекта, по сравнению со стандартным анализом, который дает только положительный ответ.

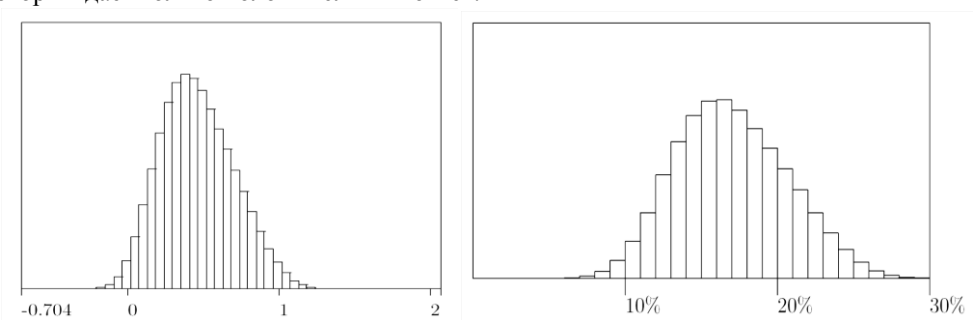


Рис. 1. Гистограммы NPV и IRR

Список литературы

1. *Ferson S., Ginzburg L.* Different methods are needed to propagate ignorance and variability.Reliability Engineering and System Safety, (1996) 54, 133–144.

2. *Neumaier A.* Clouds, Fuzzy Sets and Probability Intervals.Reliable Computing 10, 249–272. 2004.

3. *Dempster A.P.* Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping. Annals of Mathematical Statistics 38: 325-339. 1967.

4. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence.Princeton University Press, Princeton, NJ. 1976.

5. *Dobronets B.S., Popova O.A.* Numerical probabilistic ananlysis under aleatory and epistemic uncertainty. 15th GAMM-IMACS Iternational Symposium SCAN'12, Book of Abstacts, Novosibirsk, Russia, Institute of Computational Technologies, 2012, pp 33--34

6. *Добронец Б.С., Попова О. А.* Численный вероятностный анализ для исследования систем в условиях неопределенности. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2012. 21(4) с. 39–46

Исследование особенностей поведения участников лабораторных игр при изменениях условий проведения экспериментов

С.А. Скиндерев

ВЦ РАН, Москва, Россия

Многолетний опыт работы лаборатории экспериментальной экономики МФТИ показывает, что поведение участников не всегда можно предсказать на основе теоретико-игрового анализа. Также некоторые малозаметные на первый взгляд нюансы проведения экспериментов могут радикальным образом изменить поведение участников и итоговые результаты.

Целью данной работы является исследование влияния изменений условий экспериментов на поведение участников. Основа исследования – это постановка серий экспериментов. Главное требование – чтобы условия проведения экспериментов были максимально близки. Отличие должно быть в одном условии, влияние которого исследуется.

В качестве технической базы проведения серий взята программная реализация аукциона с наведенными заявками [1]. Данный аукцион можно применять для широкого класса игр нескольких участников, имеющих возможность кооперировать [2].

В качестве первой игровой ситуации выбрана лабораторная кооперативная игра с наведенными заявками [3]. В первой серии аукцион был представлен участникам как разновидность непрерывного двойного аукциона. Во второй было дополнительно сообщено, что в данной игре есть так называемые блокирующие стратегии. Оказалось, что для некоторых наборов числовых параметров наличие дополнительной информации радикальным образом сказалось на поведении участников. Это выразилось в проявлении эффектов первой и последней секунд, а также положительным образом сказалось на общей эффективности участников. Под эффективностью здесь понимается отношение суммарного реализованного выигрыша к максимально возможному (достигаемому при всеобщей кооперации).

Другая исследуемая ситуация – модельный сетевой рынок «TRUE» [4]. В работе [5] утверждается, что все игроки пытаются независимо максимизировать прибыль всех своих экономических агентов, не учитывая принадлежность агентов к игрокам. Целью данного раздела является постановка нескольких серий экспериментов для проверки упомянутой статистической гипотезы. Для этого было проведено несколько серий одной и той же игры, но в различных проектных представлениях. В частности была серия с исходной игрой «TRUE», а также ее кооперативное представление (с помощью характеристической функции). Во всей серии использован один и тот же рыночный механизм – аукцион с наведенными заявками. Различное проектное представление одной и той же экономической ситуации радикальным образом повлияло на распределение выигрышей между одинаковыми ролями.

При проведении серий экспериментов одной из проблем является получение независимых данных. Ведь на результаты очередной итерации могут влиять исходы предыдущих. Чтобы уменьшить эффекты повторяемости и стационарности применяются всевозможные методы рандомизации. Для проведения серии экспериментов необходимо количество участников, кратное количеству ролей в игре (обычно это три или четыре). Игроки случайным образом делятся на группы (тройки или четверки), далее внутри каждой группы случайным образом назначаются роли.

Другой проблемой лабораторных экспериментов является мотивация участников. Основной мотивирующей силой в экспериментальной экономике являются денежные вознаграждения, но также применяются и другие способы стимулирования участников. Анализируемые в данной работе серии экспериментов проводились в рамках учебного курса «Экспериментальная экономика». Мотивация участников обеспечивалась начислением учебных очков, которые влияли на зачетную оценку по данному курсу. В таких условиях отсутствие денежных вознаграждений чаще всего не снижает мотивацию участников.

Список литературы

1. *Скиндерев С.А.* Использование технологии Генератор Проектов для создания лабораторных сетевых аукционов // Автоматизация проектирования инженерных и финансовых информационных систем средствами генератора проектов. М.: ВЦ РАН, 2010. С. 80–88.

2. *Скиндерев С.А., Меньшиков И.С.* Проектные игры как инструмент моделирования экономических ситуаций // Труды 55-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2012. С. 70–71.

3. *Скиндерев С.А.* Блокирующие стратегии в лабораторных кооперативных играх с наведенными заявками // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 4. С. 155–168.

4. *Меньшиков И.С., Платонов В.В., Скиндерев С.А., Чабан А.Н.* Сравнительный анализ эффективности лабораторных сетевых аукционов. М.: ВЦ РАН, 2007.

5. *Меньшиков И.С., Платонов В.В.* Игровые модели сетевых аукционов и их лабораторные исследования // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 8. С. 63–79.

Краевые задачи линейного программирования в оптимальном управлении*

Е.В. Хорошилова

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В гильбертовом пространстве рассматривается линейная краевая задача оптимального управления, в основе которой лежит линейная динамика с неявно заданным начальным значением траекторий и терминальная задача линейного программирования на правом конце временного интервала.

Требуется найти управление $u^*(\cdot)\in U$ такое, чтобы правый конец x_1^* отвечающей ему траектории $x^*(\cdot)$ минимизировал при линейных ограничениях целевой функционал:

$$x_0^*\in Agr\min\{\langle\phi_0,x_0\rangle \mid A_0x_0\le a_0,\ x_0\in R^n\}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1^*\in Arg\min\{\langle\phi_1,x_1\rangle \mid A_1x_1\le a_1,\ x_1\in R^n,\\ \dot x(t)=D(t)x(t)+B(t)u(t),\qquad x(t_0)=x_0^*,\ x(t_1)=x_1^*\},\\ x(\cdot)\in AC^n[t_0,t_1],\ u(\cdot)\in U,\end{cases} \tag{2}$$

где $U=\left\{u(\cdot)\in L_2^r[t_0,t_1] \mid \|u(\cdot)\|_{L_2^r}\le const\right\}$, $D(t),B(t)-$ $n\times n$, $n\times r$ матричные непрерывные функции, A_0,A_1 – матрицы размера $m\times n$ $(m<n)$, векторы $a_0,a_1\in R^m$, $\phi_0,\phi_1\in R^n$ известны. Траектории являются абсолютно непрерывными функциями: $x(\cdot)\in AC^n[t_0,t_1]\subset L_2^n[t_0,t_1]$. Предполагается, что решение задачи существует.

Задача трактуется как динамическая система, которая выбором управления переводит с помощью своей траектории линейную задачу оптимизации из начального состояния в терминальное. Такая конструкция позволяет адаптировать и подстраивать модель некоторого объекта к постоянно меняющемуся реальному объекту, находящемуся в изменчивой среде.

Предлагается седловой метод решения. Задача сводится к нахождению седловых точек лагранжианов, где малый лагранжиан для задачи оптимизации на левом конце отрезка

$$l(p_0;x_0)=\langle\phi_0,x_0\rangle+\langle p_0,A_0x_0-a_0\rangle$$

определен при всех $p_0\in R_+^m$, $x_0\in R^n$, а лагранжиан для задачи на всем отрезке

$$L(p_1,\psi(\cdot);x_1,x(\cdot),u(\cdot))=\langle\phi_1,x_1\rangle+\langle p_1,A_1x_1-a_1\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t),D(t)x(t)+B(t)u(t)-\dot x(t)\rangle dt$$

при всех $(p_1,\psi(\cdot))\in R_+^m\times\Psi_2^n[t_0,t_1]$, $(x_1,x(\cdot),u(\cdot))\in R^n\times AC^n[t_0,t_1]\times U$. Здесь $\Psi_2^n[t_0,t_1]$ – линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из сопряженного пространства.

Седловые точки $(p_0^*;x_0^*)$ и $(p_1^*,\psi^*(\cdot);x_1^*,x^*(\cdot),u^*(\cdot))$ функций Лагранжа образованы, соответственно, прямыми x_0^*, $(x_1^*,x^*(\cdot),u^*(\cdot))$ и двойственными p_0^*, $(p_1^*,\psi^*(\cdot))$ переменными, первые из которых являются решениями задач (1)-(2), а вторые – решениями двойственных к ним задач. Приводя оба лагранжиана к сопряженному виду, выводятся задачи, двойственные к (1)-(2).

На основе прямых и двойственных задач формируются две краевые задачи. Полученная система краевых задач имеет седловую природу и позволяет строить методы (в рамках гильбертовых пространств), которые сходятся к решению задач по всем своим переменным: управлениям, траекториям, сопряженным функциям, а также по прямым и двойственным переменным терминальных задач [1-3]. Аналогичные методы, основанные на принципе максимума, автору не известны. Вариационное неравенство относительно управлений из этих краевых задач называют интегральным принципом максимума.

Для решения краевых дифференциальных систем был использован экстраградиентный подход в виде следующего итеративного процесса.

1) *прогнозный полушаг*:

на левом конце отрезка

$$\bar p_0^k=\pi_+\left(p_0^k+\alpha(A_0x_0^k-a_0)\right),\ \bar x_0^k=x_0^k+\alpha(\phi_0+A_0^Tp_0^k);$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00783) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5264.2012.1).

на всем отрезке

$$\dot{x}^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x_0^k(t_0) = x_0^k, \ \bar{p}_1^k = \pi_+\left(p_1^k + \alpha(A_1 x_1^k - a_1)\right),$$

$$\dot{\psi}^k(t) + D^T(t)\psi^k(t) = 0, \quad \psi_1^k = \phi_1 + A_1^T p_1^k, \ \bar{u}^k(t) = \pi_U\left(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t)\right);$$

2) *основной полушаг*:

на левом конце отрезка

$$p_0^{k+1} = \pi_+\left(p_0^k + \alpha(A_0\bar{x}_0^k - a_0)\right), \ x_0^{k+1} = x_0^k + \alpha(\phi_0 + A_0^T p_0^k),$$

на всем отрезке

$$\dot{\bar{x}}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \quad \bar{x}_0^k(t_0) = \bar{x}_0^k, \ p_1^{k+1} = \pi_+\left(p_1^k + \alpha(A_1\bar{x}_1^k - a_1)\right),$$

$$\dot{\bar{\psi}}^k(t) + D^T(t)\bar{\psi}^k(t) = 0, \quad \bar{\psi}_1^k = \phi_1 + A_1^T \bar{p}_1^k, \ u^{k+1}(t) = \pi_U\left(u^k(t) - \alpha B^T(t)\bar{\psi}^k(t)\right), \ k = 0,1,2,...$$

Доказывается, что выписанный седловой процесс сходится монотонно по норме пространства к седловым точкам функций Лагранжа. Применительно к исходным краевым задачам оптимального управления это означает слабую сходимость по управлениям, сильную по траекториям, сопряженным траекториям и по терминальным переменным.

Список литературы

1. *Антипин А.С., Хорошилова Е.В.* О методах экстраградиентного типа для решения задачи оптимального управления с линейными ограничениями // Известия ИГУ. Серия "Математика", 2010. Т. 3. № 3. С. 2–20. Онлайн: http://isu.ru/izvestia/

2. *Khoroshilova E.V.* Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function // Optimization Letters. Published online 23 May 2012. DOI: 10.1007/s11590-012-0496-2

3. *Хорошилова Е.В.* Экстраградиентный метод в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 117–133.

Уточнение модели поведения участников эксперимента с учетом психофизиологических характеристик*

Р.И. Яминов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

В работе предполагается учесть психофизиологические характеристики участников экспериментов для уточнения модели, описывающей их поведение во время лабораторных экспериментов [1]. Для этой цели применяются методы экспериментальной экономики, которые позволяют проверять гипотезы, основанные на теоретических моделях математической экономики, в контролируемых условиях специально оборудованной лаборатории, где есть возможность создать требуемую экономическую ситуацию для участников эксперимента.

Для оценки психофизиологических характеристик участников эксперимента и построения модели поведения игроков используются методы психологического тестирования и компьютерной стабилографии. В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ во время проведения экспериментов с помощью системы стабилографических кресел проводятся измерения функционального состояния участников лабораторных игр. С помощью стабилографических кресел производилась регистрация перемещения общего центра давления сидящего человека на специальную платформу. Текущее функциональное состояние участника описывалось значениями параметров энергии, стабильности и энтропии и сопоставлением этих показателей с состоянием спокойного бодрствования с закрытыми глазами. Сложность подобных измерений состоит в том, что данные каждого игрока находятся в очень неудобном для ручной обработки состоянии. В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ был разработан программный комплекс на языке Python для выделения из стабилографических рядов параметров, позволяющих измерять функциональное состояние [2]. Для измерения функционального состояния использовалось три основных параметра: логарифм энергии, энтропия и энтропия Хёрста. Написанные программы позволяют автоматически обрабатывать данные экспериментов, рассчитывая перечисленные выше параметры для участков эксперимента, разделенных метками.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-31258 мол_а.

Полученные с помощью стабилографии данные о физиологическом состоянии участников эксперимента дополняются психологическими данными и сопоставляются с результатами принятий решений. Для изучения психологических характеристик участников используется сайт www.excellence.ru, созданный в Лаборатории. На сайте имеется 6 модулей по 4 теста в каждом. За время существования сайта на нем прошли тестирование более 10 000 человек. В качестве основных методов определения психологических характеристик участников предлагается использовать тесты MBTI и Эннеаграмма [3]. Оба теста составлены из вопросов, нацеленных на оценку человеком собственных качеств. В основе типологии MBTI лежит концепция, разработанная швейцарским психологом и психотерапевтом Карлом Юнгом. Эта типология основана на категоризации восприятия окружающей действительности разными людьми. В ней присутствуют 16 типов личности, каждый человек относится к одному из этих типов личности. В используемом тесте 94 вопроса, что позволяет с определенной долей вероятности исключить социально-желаемые ответы.

В итоге с помощью методов машинного обучения и интеллектуального анализа данных строится модель, описывающая взаимосвязь между особенностями принятия решений участниками и их психофизиологическими индивидуальными характеристиками. Такой подход позволяет получать исчерпывающие данные о процессе принятия решения участниками эксперимента, включая информацию о динамике их функционального состояния и психологических характеристиках. Это дает возможность анализировать индивидуальную результативность участников экспериментов с учетом их психофизиологических характеристик, а также оценивать эффективность и стабильность механизмов взаимодействия с учетом человеческого фактора [4].

Метод предполагает выполнение следующих четырех последовательных шагов:

1. Планирование и проведение серии экспериментов, направленных на выявление взаимосвязи процессов принятия решений и динамики функционального состояния участников лабораторных рынков.
2. Действия игроков в эксперименте записываются в протокол, из которого после игры выделяются численные характеристики для каждого из игроков, количественно описывающие выраженность некоторых черт поведения – поведенческие типы.
3. Затем с помощью статистических методов машинного обучения строится зависимость между психологическими типами, динамикой функционального состояния и поведенческими типами.
4. В результате строится модель взаимосвязи процессов принятия решений, динамики функционального состояния участников лабораторных рынков и психологических характеристик.

Список литературы

1. *Яминов Р.И., Шишкин П.А.* Методология выявления взаимосвязей между принятием решений участниками лабораторных рынков, их психологическими характеристиками и динамикой функционального состояния. // Труды 55-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. Том 1. – М.: МФТИ, 2012. – С. 83–84.

2. *Шкловер А.В., Игнатов А.Д., Шишкин П.А.* Применение компьютерных технологий для исследования функциональных состо- яний участников лабораторных дискретных игр. // Труды 55-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. Том 1. – М.: МФТИ, 2012. – С. 68–69.

3. *Меньшикова О.Р., Мороз И.И., Талачева Е.И.* Влияние психологического типа участника лабораторных рынков на его поведение в социально-экономических экспериментах. Сборник научных трудов МФТИ «Модели и методы обработки информации», М. 2009. С. 161-174.

4. *Яминов Р.И., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р.* Исследование правил торговли оптового рынка мощности и электроэнергии с помощью методов экспериментальной экономики. // Математическое моделирование информационных систем. – М.: МФТИ, 2012. – С. 81–91.

Оптимизационные методы исследования операций

1. *A.I. Kosolap* The method of the exact quadratic regularization for global optimization 22
2. *V.G. Malinov* Версии двух проекционных двухшаговых методов для решения седловых и других задач 25
3. *В.А. Балаханов, В.В. Балашов, В.А. Костенко* Задача построения многопроцессорного статико-динамического расписания 27
4. *Е.М. Бронштейн, Д.М. Вагапова, А.В. Назмутдинова* Задача о школьном автобусе 28
5. *П.М. Вдовин, И.А. Зотов, В.А. Костенко, А.В. Плакунов, Р.Л. Смелянский* Задача распределения ресурсов центров обработки данных и подходы к ее решению 30
6. *Д.Р. Гончар, М.Г. Фуругян* Алгоритмы планирования вычислений в многопроцессорных системах с неоднородным множеством работ 32
7. *В.М. Гордуновский* Алгоритм экспоненциальной аппроксимации для задач линейного программирования 33
8. *Т.В. Груздева, А.В. Орлов* Численное тестирование специального метода локального поиска в двухуровневых задачах с матричной игрой на нижнем уровне 34
9. *Ю.Г. Евтушенко, А.И. Голиков* Эффективные методы решения задач оптимизации большой размерности 36
10. *В.И. Ерохин, А.С. Красников, М.Н. Хвостов* О разрешимости задачи линейного программирования при минимальной по евклидовой норме матричной коррекции её допустимой области 37
11. *А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова* Об алгоритме поиска экстремума в классах функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой 39
12. *Ю.П. Лаптин* Определение коэффициентов штрафа и формирование точных штрафных функций 39
13. *Д.М. Лебедев* Задача проектирования нулевой точки на квадрику 42
14. *А.Д. Мижидон, К.А. Мижидон* Построение управления, обеспечивающего выполнение фазовых и смешанных ограничений 43
15. *А.В. Орлов* Двухуровневые оптимизационные модели для задач автомобильного и железнодорожного транспорта 44
16. *М.А. Посыпкин, И.Х. Сигал* Системный подход к созданию программных комплексов для решения задач глобальной оптимизации 47
17. *М.Х. Прилуцкий* Оптимальное планирование для моделей двухстадийных стохастических производственных систем 48
18. *В.В. Рябов, М.В. Тихонова* Идентификация моделей радикально-цепного окисления параллельными методами условной глобальной оптимизации 49
19. *А.С. Стрекаловский* К решению одного обобщения биматричной игры 52
20. *М.Г. Фуругян* Планирование вычислений в многопроцессорных системах реального времени с дополнительным ресурсом 53
21. *А.С. Хохлов, Ю.М. Цодиков* Нелинейные модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода 54
22. *П.Е. Шестов, В.А. Костенко* Проблемы построения расписаний при проектировании информационно-управляющих систем на базе существующих 56

The method of the exact quadratic regularization for global optimization

A.I. Kosolap

The Ukrainian State Chemical-Technological University,
Dnepropetrovsk, Ukraine

In this paper we present a new method of exact quadratic regularization for the deterministic global optimization. This method can be applied for solving large scale problems. Numerical results have showed that the proposed method is more effective than existing ones.

Many problems in economy, finance, project optimization, planning, computer graphics, management and other difficult systems can be transformed in to optimization problems in finite-dimensional space where the objective function and constraints are the twice differentiable functions. Such problems contain the set of local

minima and belong to class NP-difficult. However this class can be divided into two classes of complexity: minimization or maximizations of a vector norm on a convex set.

Let's consider the nonlinear optimization problem

$$\min\{f_0(x) | f_i(x) \le 0,\ i=1,\ldots,m,\ x \in E^n\}, \qquad (1)$$

where all functions $f_i(x)$ – are twice differentiable, x – vector of n-dimensional Euclidean space E^n. Let the solution of a problem (1) exist and its feasible domain is bounded.

Let x^* be the point of global minimum of a problem (1). We transform the problem (1) to the following

$$\min\{x_{n+1} | f_0(x) + s \le x_{n+1},\ f_i(x) \le 0,\ i=1,\ldots,m,\ x \in E^n\}, \qquad (2)$$

where the value s is chosen so that $f_0(x^*) + s \ge \|x^*\|^2$. The solution of the problem (2) is the point (x^*, x_{n+1}^*) where $x_{n+1}^* = f_0(x^*) + s \ \ge 0$. Further, using the replacement $x = Az$ where matrix A is of the order $(n+1)\times(n+1)$ is given by

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{n+1} \end{pmatrix}$$

the problem (2) is transformed to the following one

$$\min\{\|z\|^2 | f_0(\bar{z}) + s \le \|z\|^2,\ f_i(\bar{z}) \le 0, i = 1,\ldots,m, z \in E^{n+1}\}, \qquad (3)$$

where $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_n)$, $z = (\bar{z}, z_{n+1})$. Thus the problem (1) transformed to the minimization of a norm of a vector. The minimum value $r > 0$ exists so that all functions

$$g_0(z) = f_0(\bar{z}) + s + (r-1)\|z\|^2, g_i(z) = f_i(\bar{z}) + r\|z\|^2, i = 1,\ldots,m$$

are convex on the bounded feasible domain of the problem (1). It follows from the fact that Hessians of these functions are positively defined matrixes (matrixes with a dominant main diagonal) at the corresponding choice of parameter $r > 0$. Let us use the exact quadratic regularization for transforming the problem (3) to the following

$$\min\{\|z\|^2 | g_i(z) \le d,\ i=0,\ldots,m,\ r\|z\|^2 = d\}, \qquad (4)$$

where all $g_i(z)$ are strictly convex functions and d – the unknown variable.

We denote feasible sets of the problem (4) through $S_1(d) = \{z | g_i(z) \le d,\ i=0,\ldots,m\}$ and $S_2(d) = \{z | r\|z\|^2 \le d\}$. Sets $S_1(d)$ and $S_2(d)$ are convex and they define feasible domain of a problem (4). The following inclusions $S_1(d) \subset S_1(d+\Delta)$, $S_2(d) \subset S_2(d+\Delta)$ hold for any $\Delta > 0$. Let (d_0, z^0) be the solution of a convex problem

$$\min\{d \mid g_i(z) \le d, i = 0,\ldots,m, r\|z\|^2 \le d\}. \qquad (5)$$

If $r\|z^0\| = d_0$ then $x^* = \bar{z}^0$ is the solution of a problem (1). Otherwise a problem (4) is equivalent to the maximization of a vector norm on a convex set

$$\max\{\|z\|^2 | g_i(z) \le d, i = 0,\ldots,m\}, \qquad (6)$$

where of variable d we find using the method of a dichotomy. The problem (6) is multiextremal. However there are classes of problems (6) where global maximum can be effectively computed.

Problem	n	m	Method EQR	Best known Glob. min
1	40	0	–1560	–1550.5
2	50	0	–93.999987	–93.977029
3	50	0	–180	–156
4	10	0	–8261.68	–8247
4	20	0	–17298.849	–14371.8
5	20	0	–9816.15	–9742.310076
6	49	1	–0.981669037	–0.5322069
7	10	3	–47.76109086	–47.76109081
8	20	2	–0.803619188	–0.803619104
9	14	15	0.0311596	0.057406

Table 1. Numerical results

We have solved more than hundred difficult test problems by the method of an exact quadratic regularization (EQR). Some of them are presented in the table 1.

The global optimization test problems considered in the numerical experiments (tabl. 2).

Problem	Global minimization	Ref.
1	$\min\{\sum_{1\le i<j\le n} x_i^2x_j^2+ix_i^3x_j+jx_ix_j^3\}$	[1]
2	$\min\{\sum_{1\le i<j\le n}(x_ix_j+x_i^2x_j-x_j^3-x_i^2x_j^2)\}.$	[1]
3	$\min\{\sum_{1\le i<j<k<l\le n}(-i-j+k+l)x_ix_jx_kx_l\}.$	[1]
4	$\min\{\sum_{i=1}^{n-1}[-x_i\sin(\sqrt{\lvert x_i-x_{i+1}-47\rvert}-(x_{i+1}+47)\sin(\sqrt{\lvert x_{i+1}+x_i/2+47\rvert})].$	[2]
5	$\min\{\sum_{i=1}^{n-1}[(x_{i+1}+1)\cos(\sqrt{\lvert x_{i+1}-x_i+1\rvert})\sin(\sqrt{\lvert x_{i+1}+x_i+1\rvert})+$ $+x_i\cos(\sqrt{\lvert x_{i+1}+x_i+1\rvert})\sin(\sqrt{\lvert x_{i+1}-x_i+1\rvert})]\mid -520\le x\le 520\}.$	[3]
6	$\min\{\sum_{1\le i<j<k\le n}(x_ix_jx_k+x_i^2x_j-x_i^2x_k+x_jx_k^2)\mid\lVert x\rVert^2\le 1\}$	[1]

Table 2. Test problems

Problems 7 [4]

$$\min\{\sum_{i=1}^{10}x_i(c_i+\ln\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{10}x_j})\}$$

where $c=(-6.089,-17.164,-34.054,-5.914,-24.721,-14.986,-24.1,-10.708,-26.662,-22.179).$

subject to

$$x_1+2x_2+2x_3+x_6+x_{10}-2=0,$$
$$x_4+2x_5+2x_3+x_6+x_7-1=0,$$
$$x_3+x_7+x_8+2x_9+x_{10}-1=0,$$
$$0\le x_i\le 10, i=1,...,10.$$

Problem 8 [5]

$$\max\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos^4(x_i)-2\prod_{i=1}^{n}\cos^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}ix_i^2}}\right|\}$$

subject to

$$0.75-\prod_{i=1}^{n}x_i\le 0,\quad \sum_{i=-1}^{n}x_i-7,5n\le 0,\quad 0\le x_i\le 10, i=1,...,n.$$

Problem 9 [6]

$$\min\{63098.88x_2x_4x_{12}+5441.5x_2^2x_{12}+115055.5x_2^{1.664}x_6+$$
$$+6172.27x_2^2x_6+63098.88x_1x_3x_{11}+5441.5x_1^2x_{11}+11055.5x_1^{1.664}x_5+$$
$$+6172.27x_1^2x_5+140.53x_1x_{11}+281.29x_3x_{11}+70.26x_1^2+281.29x_1x_3+$$
$$+281.29x_3^2+14437x_8^{1.8812}x_{12}^{0.3424}x_{10}x_1^2x_7x_9^{-1}x_{14}^{-1}+20470.2x_7^{2.893}x_{11}^{0.316}x_1^2\}$$

subject to

$$-x_7+1.524\le 0,\quad -x_8+1.524\le 0,$$
$$0.07789x_1x_7-2x_9-x_7\le 0,\quad 7.05305x_1^2x_{10}-x_2x_8x_9x_{14}\le 0,$$
$$0.08333x_{14}-x_{13}\le 0,$$
$$47.136x_2^{0.333}x_{12}^2-1.333x_8x_{10}x_{12}x_{13}^{2.1195}+62.08x_{13}^{2.1195}x_8^{0.2}-x_{10}x_{12}\le 0,$$
$$0.04771x_{10}x_8^{1.88812}x_{12}^{0.3424}-1\le 0,\quad 0.0488x_9x_7^{1.893}x_{11}^{0.316}-1\le 0,$$
$$0.0099x_1-x_3\le 0,\quad 0.0193x_2-x_4\le 0,\quad 0.0298x_1-x_5\le 0,$$
$$0.056x_2-x_6\le 0,\quad -x_9+2\le 0,\quad -x_{10}+2\le 0,\quad x_{12}-x_{11}\le 0,\quad 0.001\le x\le 5.$$

The results of numerical experiments in testing several functions show that the algorithm given in this paper is efficient and reliable.

References

1. *Nie J., Wang Li.* Regularization Methods for SDP Relaxations in Large Scale Polynomial Optimization. University of California, 2011.
2. *Sekaj I.* Robust Parallel Genetic Algorithms with Re-Initialization. Slovak University of Technology, 2003.
3. *Oplatkov I. Z.* Metaevolution Synthesis of Evolutionary Algorithms by means of Symbolic Regression. Doctoral Thesis. Zlin, Czech Republic, 2007.
4. *Kroese D. P., Porotsky S., Rubinstein R. Y.* The Cross-Entropy Method for Continuous Multi-Extremal Optimization // Methodol. Comput. Appl. Probab. 8, 2008. P. 383–407.
5. *Kajee-Bagdadi Z.* Differential Evolution Algorithms for Constrained Global Optimization. University of the Witwatersrand, Johannesburg, 2007.
6. *Pant M., Thangaraj R. and Singh V. P.* Optimization of Mechanical Design ProblemsUsing Improved Differential Evolution Algorithm // International Journal of Recent Trends in Engineering. 2009.Vol. 1, No. 5. P. 21–25.

Версии двух проекционных двухшаговых методов для решения седловых и других задач

V.G. Malinov

Ульяновский госуниверситет, Россия

Аннотация. Предлагаются версии двух проекционных обобщённых двухшаговых экстраградиентных методов для решения задач равновесного программирования в евклидовом пространстве, когда седловые точки отыскиваются для выпукло вогнутой непрерывно дифференцируемой функции с Липшицевыми градиентами. Доказана сходимость методов. Получены оценки скорости сходимости, без требования строгой выпукло вогнутости функции или строгой монотонности.

1. Как известно [1]–[4], многие экстремальные задачи математической физики, оптимального управления, математической экономики могут быть сведены к седловой задаче на выпуклом замкнутом множестве $Q \times U \subset E^n \times E^m$ для выпукло вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$,

$$\varphi\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}\right) \le \varphi\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right) \le \varphi\left(\mathbf{x},\mathbf{u}^*\right) \ \forall \mathbf{x} \in Q, \mathbf{u} \in U, \qquad (1)$$

где

а) функция $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ определена на подмножестве $W \in Q \times U \subset E^{n+m}$, выпукла по $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и вогнута по $\mathbf{u} \in U \subset E^m$; $Q \subset E^n$ и $U \subset E^m$ – непустые выпуклые замкнутые множества на соответствующих евклидовых пространствах, нормированных скалярными произведениями;

б) функция $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ имеет Липшицевые частные градиенты (с константой $0 < L < \infty$) и "овражные" гиперповерхности уровней;

с) множество седловых точек $\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)$ функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ на $W \subset E^{n+m}$ непусто, $W_* = Q_* \times U^* \ne \varnothing$.

2. В [1]–[3] и других работах для решения задачи (1) предложено несколько экстраградиентных методов и в [4] – проекционный двухшаговый экстраградиентный метод. Целью данной работы является исследование вариантов двух проекционных двухшаговых экстраградиентных методов на основе проекционного двухшагового четырёхпараметрического метода [5], для задач вида (1). Первый из них:

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}, \ \mathbf{z}^k = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k, \ \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0,$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x\left(\mathbf{z}^k,\mathbf{u}^k\right)\right)\right],$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k + \lambda_k \nabla\varphi_u\left(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k\right)\right], \ k \ge 0; \qquad (2)$$

где $\forall(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0) \in E^n \times E^m$ – начальная точка; параметры метода α_k, λ_k, β_k, γ_{1k}, γ_{2k} – положительные константы; $P_Q(\cdot)$ и $P_U(\cdot)$ – операторы проектирования на множества Q и U соответственно. Здесь при шаге по первой переменной экстраполированная точка $\mathbf{z}^k$ такова, что $\forall \mathbf{u}^k$, $k \ge 0$,

$$\left\|x^{k+1}-z^k\right\| \le \left\|x^{k+1}-x^k\right\|,\ \left\|z^k-x^*\right\| \le \left\|x^k-x^*\right\| \qquad (3)$$

Второй метод решения задачи (1) следующий:

$$\mathbf{y}^k=\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k-1},\ \mathbf{z}^k=\mathbf{x}^k+\alpha_k\mathbf{y}^k,\ \mathbf{x}^{-1}=\mathbf{x}^0,$$

$$\mathbf{x}^{k+1}=P_Q\left[\mathbf{z}^k+\beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k-\gamma_{2k}\nabla\varphi_x\left(\mathbf{z}^k,\mathbf{u}^k\right)\right)\right],$$

$$\mathbf{v}^k=\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k-1},\ \mathbf{w}^k=\mathbf{u}^k+\alpha_k\mathbf{v}^k,\ \mathbf{u}^{-1}=\mathbf{u}^0,$$

$$\mathbf{u}^{k+1}=P_U\left[\mathbf{w}^k+\lambda_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{v}^k+\gamma_{2k}\nabla\varphi_u\left(\mathbf{z}^k,\mathbf{w}^k\right)\right)\right],\ k\ge 0, \qquad (4)$$

где обозначения те же, что и в (2). При шаге по первой переменной экстраполированная точка удовлетворяет (3), а при шаге по второй переменной

$$\left\|w^k-u^{k+1}\right\| \le \left\|u^k-u^{k+1}\right\|,\ \left\|w^k-u^*\right\| \le \left\|u^k-u^*\right\| \qquad (5)$$

В докладе приводятся схемы доказательств вспомогательных неравенств, сходимости и оценок скорости сходимости методов.

3. Сначала приведём достаточные условия сходимости на $W\subset E^{n+m}$ итеративной последовательности $\left\{\mathbf{x}^k;\mathbf{u}^k\right\}$, затем – условия для оценки линейной скорости сходимости метода (2), (3) к решению задачи (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия a), b), c) и параметры метода* (2), (3) *таковы, что*

$$0<\alpha<1/3=\alpha^0,\ 0<\gamma_1<\gamma_1^0,\ 0<\gamma_2<2\gamma_1/L,\ 0<\lambda<1/L,$$

$$0<\beta<8d/\left(27\gamma_1+8Ld\gamma_2\right),\ d=1-9\alpha^2. \qquad (6)$$

Тогда существует седловая точка $\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)\in W_*$ *такая, что процесс* (2)-(3), (6) по норме *пространства* $E^n\times E^m$ *сходится к седловой точке функции* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$: $\mathbf{x}^k\to\mathbf{x}^*\in Q$, $\mathbf{u}^k\to\mathbf{u}^*\in U^*$, *при* $k\to\infty$, $\forall\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0\right)\in E^{n+m}$.

Теорема 2. *Пусть* $\forall k\ge 0$ *для каждого* $\mathbf{u}^k$, *элементы последовательности* $\left\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right\}$ *таковы, что* $\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\right\|\le\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\right\|\le\left\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\right\|$ *и выполнены все условия теоремы 1. Параметры метода* (2), (3), (6) *и константа Липшица* L *таковы, что*:

$$0<\alpha<1/4,\ 0<\gamma_2<9\gamma_1/(4L),\ 0<\beta<L\lambda/(\gamma_1+L\gamma_2),$$

$$0<\lambda<8e(\gamma_1+L\gamma_2)/[L(41\gamma_1+8Le\gamma_2)],\ e=1-16\alpha^2. \qquad (7)$$

Тогда последовательность $\left\{\mathbf{x}^k;\mathbf{u}^k\right\}$ *метода* (2), (3), (6), (7) *из любой начальной точки линейно сходится к некоторой седловой точке* $\left(\mathbf{x}^*;\mathbf{u}^*\right)\in Q_*\times U^*$ *задачи (1) с оценкой* $\rho\left(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right)\le q^k\rho\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0\right)$, *где* $0<q<1$, $q=\left[(3-L\lambda)/\left(3-\beta\gamma_1-L\beta\gamma_2\right)\right]^{1/2}$, $\rho^2(x^k,u^k)=\left\|x^k-x^*\right\|^2+\left\|u^k-u^*\right\|^2$.

4. В следующих теоремах 3 и 4 приведём условия сходимости и оценки линейной скорости сходимости метода (4), (3), (5).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия a), б), c) и параметры метода* (4), (3), (5) *таковы, что* $0<\alpha<1/\sqrt{7},\ 0<\gamma_1<\gamma_1^0,\ 0<\gamma_2<\gamma_2^0$,

$$0<\beta,\ \lambda<2a/(7\gamma_1+2La\gamma_2),\ a=1-7\alpha^2. \qquad (8)$$

Тогда существует седловая точка $\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)\in Q_*\times U^*$ такая, что процесс (4), (3), (5), (8) *по норме пространства* $E^n\times E^m$ *сходится к седловой точке*: $\mathbf{x}^k\to\mathbf{x}^*\in Q$, $\mathbf{u}^k\to\mathbf{u}^*\in U^*$, *при* $k\to\infty$, $\forall\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0\right)\in E^{n+m}$.

Теорема 4. *Пусть* $\forall k\ge 0$ *последовательность* $\left\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right\}$ *таковы, что* $11\left\|x^{k+1}-x^*\right\|/5\le\left\|x^{k+1}-x^k\right\|\le\left\|x^k-x^*\right\|$, $11\left\|u^{k+1}-u^*\right\|/5\le\left\|u^{k+1}-u^k\right\|\le\left\|u^k-u^*\right\|$ *и все условия теоремы 3 выполнены. Параметры метода* (4), (3), (5), (8) *таковы, что* $0<\alpha<1/4$, $0<\gamma_2<7\gamma_1/(6L)$, $0<\beta,\lambda<3b/\left(20\gamma_1+3Lb\gamma_2\right)$, $b=1-16\alpha^2$. *Тогда последовательность* $\left\{\mathbf{x}^k;\mathbf{u}^k\right\}$ *метода* (4), (3), (5), (8) *из*

любой начальной точки линейно сходится к некоторой седловой точке $\left(\mathbf{x}^*;\mathbf{u}^*\right)\in W_*$ *задачи (1) с оценкой* $\rho\left(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right)\le q^k\rho\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0\right)$, *где* $0<q<1$, $q=\left\{\left[40+\lambda(14\gamma_1-12L\gamma_2)\right]/\left(55-\beta(63\gamma_1/2+27L\gamma_2)\right)\right\}^{1/2}$.

Список литературы

1. *Antipin A.S.* Iterative gradient prediction-type methods for computing fixed points of extremal mapping / In book: Parametric optimization and related topics IV. Verlag Peter Lang, 1997. Pp.11–24.

2. *Корпелевич Г.М.* Экстраполяционные градиентные методы и их связь с модифицированными функциями Лагранжа // Экономика и матем. методы. 1983. Т. 19. Вып. 4. С. 694–703.

3. *Антипин А.С.* Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном и равновесном программировании. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2002. 131 с.

4. *Malinov V.G.* On the Extragradient projection method for saddle-point problems // VI Moscow International Conference on Operation Research (ORM-2010). October 19-23, 2010. Proceedings. Moscow: Maks Press, 2010. Pp. 207–209.

5. *Малинов В.Г.* Четырёхпараметрические двухшаговые проекционные методы первого порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. № 12. С. 48–56.

Задача построения многопроцессорного статико-динамического расписания

В.А. Балаханов, В.В. Балашов, В.А. Костенко

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Задача построения статико-динамического расписания возникает при разработке вычислительных систем реального времени (ВСРВ), построенных в соответствии с концепцией интегрированной модульной авионики (ИМА) [1]. В частности, для операционных систем, работающих по концепции ИМА, был разработан стандарт ARINC 653 [2], специфицирующий прикладной интерфейс операционной системы. В системах, работающих в соответствии с этим стандартом, приложения (в стандарте используется понятие «раздел») различной степени критичности могут выполняться на одних и тех же вычислительных модулях, за счет чего повышается эффективность использования вычислительных ресурсов. При этом для обеспечения защиты критических разделов от возможных сбоев в разделах с меньшим уровнем критичности, используется разделение ресурсов процессора и оперативной памяти на этапе конфигурирования операционной системы. Ниже рассмотрена математическая постановка задачи построения статико-динамического расписания для многомодульной ВСРВ.

В качестве рабочей нагрузки на ВСРВ выступает множество вычислительных задач, для каждой их которых определены: максимальная длительность выполнения; частота; номер раздела. Каждой вычислительной задаче соответствует множество работ с директивными интервалами.

Статико-динамическое расписание представляет собой множество временных окон. Для каждого окна определены: раздел, к которому привязано окно; время открытия окна; время закрытия окна; вычислительный модуль, к которому привязано окно; множество работ раздела, выполняемых в данном окне.

При этом на расписание накладываются следующие ограничения:

- ограничение реального времени: интервал выполнения работы не выходит за пределы ее директивного интервала;
- ограничения, задаваемые стандартом ARINC 653:
  - все окна для одного и того же раздела привязаны к одному вычислительному модулю;
  - интервал выполнения работы не выходит за пределы ее окна;
  - окна, имеющие одинаковую привязку, не пересекаются по времени, и между ними есть промежуток, достаточный для переключения контекста.

При построении расписания в качестве минимизируемого критерия рассматривать максимальную, по всем вычислительным модулям системы, загрузку модуля работами.

Необходимо отметить, что статико-динамическое расписание в том виде, в котором оно введено выше, не задает в явном виде интервалов выполнения работ. Для того, чтобы определить эти интервалы, необходимо ввести конкретную модель вычислений, т.е. задать схему, позволяющую однозначно построить по расписанию временную диаграмму выполнения работ. Определить, является ли конкретное расписание корректным (т.е. удовлетворяющим всем ограничениям), возможно только в рамках

конкретной модели вычислений. Модель вычислений может вводить дополнительные ограничения корректности расписания.

Будем рассматривать ВС РВ со следующими свойствами:

- Система состоит из некоторого количества многопроцессорных модулей, объединенных при помощи среды обмена. Процессоры в рамках одного модуля одинаковые. Различные модули могут иметь различное число процессоров, а также процессоры различных типов. Каждый процессор содержит одно или более ядер.
- Окна для одного и того же раздела должны быть привязаны к одному ядру какого-либо процессора. Окна, привязанные к разны ядрам одного процессора и к разным процессорам одного модуля, могут выполняться параллельно.
- Одна и та же вычислительная задача может иметь различные оценки максимальной длительности выполнения на ядрах процессоров различных типов.
- Вычислительные задачи взаимодействуют при помощи передачи сообщений. Заранее известна максимальная длительность передачи заданных сообщений между разделами, привязанными к различным модулям, либо к одному и тому же модулю. Передача сообщения между задачами одного раздела считается мгновенной. Взаимодействовать могут только вычислительные задачи с одинаковой частотой.
- В рамках каждого раздела для вычислительных задач определяется приоритет. Приоритет для задачи может быть как задан в исходных данных, так и вычисляться при построении расписания. При этом последовательность, определяемая вычисленным приоритетом, не должна нарушать упорядочение, заданное исходным приоритетом.

Работы в рамках одного раздела выполняются в соответствии с приоритетом и очередью выполнения данного раздела. Работа попадает в очередь на выполнение при выполнении следующих условий:

- директивный интервал для работы начался;
- окно, в которое размещена работа, открыто;
- получены все сообщения, от которых зависит работа.

Работы из очереди выбираются в порядке убывания приоритета. При этом если в очередь поступает работа с приоритетом, большим, чем работа, выполняемая в данный момент, то происходит вытеснение выполняемой работы: более приоритетная работа поступает на выполнение, а выполняемая работа переносится в очередь.

Перечисленные выше свойства ВС РВ задают модель вычислений, характерную для современных ВС РВ авиационного назначения.

Для решения задачи построения расписания необходимо построить алгоритм, строящий корректное расписание с минимизацией указанного выше критерия – максимальной загрузки модулей работами. Одной составных частей этого алгоритма является процедура оценки корректности расписания, выполняющая построение временной диаграммы выполнения работ в соответствии с выбранной моделью вычислений.

В докладе будет введена формальная постановка задачи построения статико-динамического расписания, а также будут рассмотрены подходы к построению алгоритма решения этой задачи.

Список литературы

1. ARINC Report 651, “Design Guidance For Integrated Modular Avionics”.
2. ARINC Specification 653, “Avionics Application Software Standard Interface”.

Задача о школьном автобусе*

Е.М. Бронштейн, Д.М. Вагапова, А.В. Назмутдинова

УГАТУ, Уфа, Россия

Задача о школьном автобусе (School Bus Routing Problem, SBRP) впервые была сформулирована в [1]. За последние десятилетия опубликовано множество работ, посвященных этому классу задач, в них приводятся различные модификации, отражаются различные аспекты проблематики, анализируются как точные, так и эвристические методы решения (подробный обзор см. [2]).

Класс SBRP естественным образом входит в общее семейство оптимизационных задач транспортной логистики (Vehicle Routing Problem, VRP), постановка которых восходит к работе [3].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00005).

В докладе рассматривается одна из задач SBRP, описано ее приведение к линейной целочисленной форме. Предложен также простой эвристический метод. Проведен вычислительный эксперимент для сравнительного анализа эффективности различных методов решения задачи.

Опишем величины, необходимые для построения математической модели.

Для каждой из N остановок задана величина D_n (n=1,…,N) – число школьников, выходящих на n-ой остановке. Для единообразия школу считаем 0 остановкой.

Каждый из K автобусов характеризуется числом T^k (k=1,…,K) посадочных мест.

Между некоторыми парами остановок есть дороги, время проезда по которым равно A_{ij} (от i-ой остановки до j-ой). Соответствующий граф считаем неориентированным и связным. По величинам A_{ij} строится квадратная матрица C порядка N+1, элементами которой являются минимальные времена проезда между остановками.

Пусть S – некоторое множество остановок, включающее школу. Через $P(S)$ обозначим минимальное время проезда по маршруту, проходящему через все остановки из S и начинающемуся в 0 остановке.

Необходимо найти величины x_n^k - число школьников, которым необходимо выйти из k-го автобуса на n-й остановке таким образом, чтобы максимальное время доставки школьников было минимальным.

Ограничения:

- $x_n^k \geq 0$, целые;
- $\sum_{k=1}^{K} x_n^k = D_n \quad (n = 1,...,N)$;
- $\sum_{n=1}^{N} x_n^k = T^k \quad (k = 1,...,K)$.

Пусть $R^k = \{i : x_i^k > 0\}$ - множество остановок, на которых должен высадить пассажиров k-й автобус.

Целевая функция: $\max\{P(R^k)\} \to \min$.

Сформулированную задачу можно свести к линейной целочисленной введением булевых переменных $Y_n^k \ (k = 1,...K;\ n = 0,...,N)$ - индикаторов того, что k-й автобус высадит школьников на n-й остановке, $Z_{u,v}^k \ (k = 1,...,K;\ u,v = 0,...,N)$ - индикаторов того, что k-й автобус высаживает школьников последовательно на u-й и v-й остановках.

Число неизвестных такой задачи имеет порядок $O(N^2K)$, такой же порядок имеет число ограничений.

Рассмотрен также упрощенный вариант этой задачи, где с основных переменных x_n^k снято условие целочисленности. При этом в случае получения нецелочисленного решения предложена простая процедура модификации такого решения с помощью мультиграфа специального вида, в результате которой получаем целочисленное решение с теми же (или более короткими) маршрутами автобусов.

Предложен также простой эвристический прием, основанный на заполнении (по возможности) автобуса вдоль самой длинной цепи в исходном графе дорог с возможными отклонениями от этой цепи при превышении вместимости автобуса относительно потребности вдоль всей цепи. После заполнения очередного автобуса получаем аналогичную задачу меньшей размерности.

Проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого сравнивалась эффективность двух точных методов решения задачи (с ограничениями на целочисленность величин x_n^k и без них) и эвристического алгоритма.

Линейные целочисленные задачи решались в пакете IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.2, эвристический метод реализован в среде BORLAND DELPHI.

Некоторые выводы из численного эксперимента.

Точным алгоритмом удается решить задачи небольшой размерности (для суммарного числа автобусов и остановок, не превосходящего 16), при этом

- упрощенный метод оказался более эффективным по времени исполнения и позволяет решать задачи несколько большей размерности;
- при решении задач упрощенным методом во всех рассмотренных примерах значения x_n^k оказывались целыми без дополнительных преобразований;
- эвристический алгоритм позволяет решать задачи большой размерности, при этом максимальное время доставки увеличивается по сравнению с точным методом в среднем не более, чем на 8\% (естественно, на задачах малой размерности);
- по дополнительному показателю - среднему времени доставки школьников - эвристический алгоритм существенно превосходит точный.

Список литературы

1. *Newton R.M., Thomas W.H.* Design of school Bus Routes by computer // Socio-economic planning science, 1969, V.3, P.75-85.
2. *Park J., Kim B-I.* The school bus routing problem: A review // European Journal of Operational Research, 2010, V.202, No.2, P.311-319.
3. *Dantzig G.B., Ramser J.H.* The Truck Dispatching Problem // Management Science 1959, V.6(1), P.80-91.

Задача распределения ресурсов центров обработки данных и подходы к ее решению

П.М. Вдовин, И.А. Зотов, В.А. Костенко, А.В. Плакунов, Р.Л. Смелянский

Факультет ВМК, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Качество работы планировщиков ресурсов центров обработки данных (ЦОД) оказывает существенное влияние на эффективность использования ресурсов ЦОД и возможность гарантированного обеспечения требуемого качество сервиса (SLA). Миграция виртуальных машин и репликация storage-элементов. позволяет повысить эффективность использования сети обмена ЦОД за счет возможности более «близкого» расположения взаимодействующих виртуальных машин и storage-элементов. Ниже рассмотрим математическую постановку задачи распределения ресурсов ЦОД, которая допускает миграцию виртуальных машин и репликацию storage-элементов, а также допускает возможность использования, как единого планировщика ресурсов, так и раздельных планировщиков для каждого типа ресурсов.

Модель физических ресурсов ЦОД будем задавать графом $H=(P\cup M\cup K,L)$, где P – множество вычислительных узлов, M – множество хранилищ данных, K – множество коммутационных элементов сети обмена ЦОД, L – множество физических каналов передачи данных. На множестве P определена функция $vh(p)$, задающая производительность вычислительного узла (оп./с); на множестве M определена функция $uh(m)$, задающая объем памяти хранилища данных (байт), на множестве K определена функция $\tau h(k)$, задающая пропускную способность коммутационного элемента (байт/с); на множестве L определена функция $rh(l)$, задающая пропускную способность канала передачи данных (байт/с). Для множества M также определена функция $type(m)$, определяющая тип хранилища данных. При $type(m)=0$ подразумевается хранилище данных в памяти виртуальной машины, в ином случае – некоторая база данных.

Ресурсный запрос будем задавать графом $G=(W\cup S,E)$, где W – множество виртуальных машин реализующих приложения, S – множество storage-элементов, E – множество виртуальных каналов передачи данных между виртуальными машинами и storage-элементами запроса. На множестве W определена функция $v(w)$, задающая требуемую производительность виртуальных машин (оп./с); на множестве S определена функция $u(s)$, задающая требуемый объем памяти (байт); на множестве E определена функция $r(e)$, задающая требуемую пропускную способность канала (байт/с). Для множества S аналогично модели ЦОД задана функция $type(s)$, задающая тип storage-элемента.

Назначением ресурсного запроса будем называть отображение $A: G\to H=\{W\to P, S\to M, E\to\{K,L\}\}$.

Репликацией называется отображение $R: H\to H$, дублирующее данные некоторого $m\in M$ и создающее виртуальный канал поддержки консистентности данных $(m',l_1,k_1,\ldots,k_{n-1},l_n,m); k_i\in K, l_i\in L, m'\in M$, m' – реплика хранилища m.

Остаточным графом сети называется подграф H_{res} графа H, для которого переопределены функции: $vh_{res}(p)=vh(p)-\sum_{w\in W_p} v(w)$, $uh_{res}(m)=uh(m)-\sum_{s\in S_m} u(s)$, $\tau h_{res}(k)=\tau h(k)-\sum_{e\in E_l} r(e)$, $rh_{res}(l)=rh(l)-\sum_{e\in E_k} r(e)$.

В качестве исходных данных задачи распределения ресурсов ЦОД заданы:

1. Множество запросов $Z=\{(G_i,T_i)\}$, поступивших диспетчеру задач ЦОД. Здесь T_i – время, на которое запрашиваются ресурсы ЦОД запросом G_i
2. Остаточный граф доступных ресурсов ЦОД $H_{res}=(P\cup M\cup K,L)$.

Требуется: из множества Z разместить на выполнение в ЦОД максимальное число запросов. При это должны выполняться условия:

1. $\sum_{w \in W_p} v(w) \le vh(p)$,
2. $\sum_{e \in E_l} r(e) \le rh(l)$,
3. $\sum_{e \in E_k} r(e) \le \tau h(k)$,
4. $\sum_{s \in S_m} u(s) \le uh(m)$.
5. $\forall s \in S_m : type(s) = type(m)$

Входом алгоритма назначения запросов на физические ресурсы ЦОД является остаточный граф сети ЦОД H_{res} и множество ресурсных запросов $\{G_i\}$. Множество $\{G_i\}$ формирует диспетчер задач. В него кроме вновь поступивших запросов могут входить и запросы, которые выполняются в ЦОД.

Выходом алгоритма назначения запросов на физические ресурсы ЦОД является множество назначений ресурсных запросов на физические ресурсы $\{A_i : G_i \to H, i = \overline{1,n}\}$ и множество репликаций $\{R_i\}, i = 0,1,\ldots$.

Для решения сформулированной задачи были разработаны три алгоритма:

1. Алгоритм с общим планировщиком для всех типов ресурсов. Алгоритм основан на сочетании жадных стратегий и стратегий ограниченного перебора: в соответствии с жадным критерием выбирается очередной запрос для размещения, далее в соответствии с жадными критериями выбираются элементы запроса и физические ресурсы ЦОД для размещения элементов запроса. Если на очередном шаге не удалось разместить элемент запроса, то вызывается процедура ограниченного перебора. Если элемент является storage-элементом, то вызывается процедура репликации и только в случае неуспешного завершения процедуры репликации, вызывается процедура ограниченного перебора. Для процедуры ограниченного перебора задается параметр, который позволяет регулировать вычислительную сложность и точность алгоритма.

2. Алгоритм с использованием независимых планировщиков для каждого типа ресурсов. Алгоритм основан на независимом использовании алгоритмов назначения виртуальных машин и storage-элементов в минимальное число вычислительных узлов и хранилищ данных. Далее для полученных назначений виртуальных машин и storage-элементов строятся отображения виртуальных каналов запросов на физические каналы сети обмена ЦОД. Алгоритмы назначения виртуальных машин и storage-элементов основаны на сочетании жадных стратегий и стратегий ограниченного перебора: в соответствии с жадным критерием выбирается очередной ресурсный запрос для размещения, из множества элементов выбранного запроса в соответствии с жадным критерием выбирается очередной элемент для назначения (виртуальная машина/ storage), далее в соответствии с жадным критерием выбирается физический ресурс для размещения (вычислительный узел/хранилище данных). Если на очередном шаге не удалось разместить элемент запроса, то вызывается процедура ограниченного перебора. Для процедуры ограниченного перебора задается параметр, который позволяет регулировать вычислительную сложность и точность алгоритма. Алгоритм отображения виртуальных каналов на физические ресурсы сети обмена ЦОД основан на решении задачи о нахождении k кратчайших путей в графе. Процедура репликации storage-элементов вызывается, если не удалось отобразить виртуальный канал на физические каналы ЦОД.

3. Алгоритм на основе схемы муравьиных колоний. Данный алгоритм может быть использован вместо алгоритма с общим планировщиком для всех типов ресурсов. Алгоритм основан на использовании схемы муравьиных колоний для отображения виртуальных машин и storage-элементов на вычислительные узлы и хранилища данных и алгоритма нахождения кратчайшего пути для отображения виртуальных каналов на физические каналы ЦОД. В отличие от алгоритма 1 данный алгоритм не требует подбора эвристических процедур для частных задач (заданы ограничения на возможные значения исходных данных), но имеет более высокую вычислительную сложность.

Экспериментальное исследование алгоритмов проводилось для ЦОД с топологией fattree: каждый корневой коммутатор соединен со всеми коммутаторами первого уровня; каждый коммутатор первого уровня соединен с несколькими коммутаторами второго уровня; каждый коммутатор второго уровня объединяет либо несколько вычислительных узлов, либо несколько хранилищ данных. Рассматривались ресурсные запросы двух типов:

1. $[(\{W_i\}_{i=1}^N, \{S_j\}_{j=1}^K), E = \varnothing)]$ - несвязный.
2. $[(\{W_i\}_{i=1}^N, \{S_j\}_{j=1}^K), E = \{(W \subset \{W_i\}_{i=1}^N, S \subset \{S_j\}_{j=1}^K)\}]$ - сильносвязный.

Экспериментальное исследование алгоритмов показало, что:

1. Алгоритм с совместным планировщиком показывает лучшую точность в условиях высокой загрузки сети обмена ЦОД по сравнению с алгоритмом, использующим независимые планировщики для каждого типа ресурса, но имеет более высокую вычислительную сложность.

2. Алгоритм с использованием схемы муравьиных колоний показывает в среднем на всех классах исходных данных более высокую точность по сравнению с алгоритмами, основанными на сочетании жадных стратегий и стратегий ограниченного перебора, но имеет существенно большую вычислительную сложность.

3. Операция репликации позволяет увеличить эффективность использования физических ресурсов ЦОД. Целесообразность применения репликации растет вместе с ростом загрузки сети обмена ЦОД.

Алгоритмы планирования вычислений в многопроцессорных системах с неоднородным множеством работ

Д.Р. Гончар, М.Г. Фуругян

ВЦ РАН, Москва, Россия

Рассматривается задача составления многопроцессорного расписания для случая, когда часть работ допускает прерывания и переключения с одного процессора на другой, а часть не допускает. Разработаны:

1) приближенный алгоритм составления оптимального по быстродействию расписания;

2) приближенный алгоритм, минимизирующий максимальное запаздывание.

Проведены машинные эксперименты.

Постановка задачи. Рассматривается вычислительная система, состоящая из m процессоров, производительности которых равны s_1, s_2, …, s_m. Имеется множество работ $N = N_1 \cup N_2$, где N_1 – непрерываемые работы, N_2 – работы, допускающие прерывания и переключения с одного процессора на другой. Заданы объемы w_i и v_i работ $i \in N_1$ и $i \in N_2$ соответственно. Прерывания и переключения не связаны с временными затратами.

В первой задаче требуется составить оптимальное по быстродействию расписание выполнения множества работ N. Сначала все процессоры разбиваются на две группы. Все непрерываемые работы выполняются только процессорами первой группы, а прерываемые работы будут выполняться процессорами как первой, так и второй групп. Число процессоров в группах – m_1 и m_2 – пропорционально суммарным объемам работ из N_1 и N_2 соответственно и обратно пропорционально суммарным производительностям процессоров в этих группах.

Для распределения непрерываемых работ по m_1 процессорам был использован приближенный мультиоценочный алгоритм с калибровкой, который дает неплохую оценку погрешности и является достаточно эффективным. Для распределения прерываемых работ был разработан модифицированный алгоритм упаковки, который распределяет работы множества N_2 сначала по процессорам первой группы (если это возможно), а затем – по процессорам второй группы. Вычислительная сложность алгоритма $O(|N_1|\log|N_1| + + |N_2|\log|N_2|)$.

Во второй задаче составляется многопроцессорное расписание с директивными интервалами. Работы N_1 могут выполняться только процессорами $j = 1,\ldots,m_1$, $m_1 < m$ (процессорами первой группы), а работы N_2 – как процессорами первой, так и процессорами второй группы ($j = m_1 + 1,\ldots,m$).Для работ $i \in N_1$ установлен единый директивный интервал [0; T], который не может быть нарушен. Для каждой работы $i \in N_2$ установлен директивный интервал $[b_i, f_i]$ ($\mathrm{f_i}$-$\mathrm{b_i}$ $\geq \mathrm{t_i}$). Выполнение работы $i \in N_2$ может быть начато не ранее момента b_i, а если она завершится в момент $\overline{f}_i$, то штраф за несвоевременное выполнение работ N_2 составит величину $F = \max\limits_{i \in N_2} \max(\overline{f}_i - f_i, 0)$. Требуется найти такое расписание выполнения работ N, при котором все работы N_1 выполняются в интервале [0; T] и при этом штраф F минимален.

Разработан приближенный алгоритм, имеющий вычислительную сложность $O(|N_2|\cdot\max(m_1|N_1|, m))$. Проведен сравнительный анализ алгоритмов.

Алгоритм экспоненциальной аппроксимации для задач линейного программирования

В.М. Гордуновский

МГИМО (Университет) МИД России, Москва, Россия

Алгоритм определяет безитеративную процедуру вычисления оптимального решения задачи линейного программирования, которую будем рассматривать в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{c}_j \hat{x}_j \to min,\ \hat{x} \in R^n, \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} \hat{x}_j = \hat{b}_i,\ i \in I, \qquad I = \{1, \dots, m\}, \hat{x}_j \geq 0,\ j \in J,\ J = \{1, \dots, n\},$$

где $\hat{x}_j$, $j \in J$ - переменные исходной задачи, $\hat{c}_j > 0$, $j \in J$ - коэффициенты линейной формы, $\hat{a}_{ij} \geq 0$, $i \in I$, $j \in J$, - коэффициенты ограничений, $\hat{b}_i > 0$, $i \in I$ - правые части ограничений. Предполагается, что задача имеет решение. Преобразуем её к виду: $F = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min$, $x \in R^n, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1$, $i \in I$, $0 \leq x_j \leq e^{-1}$, $j \in J$. Для этого заменим константы и переменные на новые в следующей последовательности: 1) коэффициенты ограничений и их правые части делим на $\hat{b}_i$, получим $\sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{a}_{ij}}{\hat{b}_i} \hat{x}_j = 1$, $i \in I$; 2) заменяем исходные переменные $\hat{x}_j$ на $\bar{x}_j = \frac{\hat{x}_j}{x_j^{max} e}$, $x_j^{max} = \max_i \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}}$ $(\hat{a}_{ij} \neq 0)$, $j \in J$, после этого коэффициенты ограничений и целевой функции принимают вид: $\bar{a}_{ij} = e \frac{\hat{a}_{ij}}{\hat{b}_i} x_j^{max}$, $\bar{c}_j = e \hat{c}_j x_j^{max}$, $i \in I$, $j \in J$; 3) коэффициенты целевой функции заменяем на $c_j = \frac{\bar{c}_j}{c^{max}}$, $j \in J$, $c^{max} = \max_j \bar{c}_j$; 4) заменяем переменные $\bar{x}_j$ на $x_j = \bar{c}_j \bar{x}_j$, получаем: $a_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{c}_j}$, $i \in I$, $j \in J$. Соответствующая двойственная задача: $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \to \max$, $\lambda \in R^m$, $y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i - 1 \leq 0$, $j \in J$.

Задачу линейного программирования заменяем на аппроксимирующую функцию экспоненциального вида [1], [2]:

$$\varphi(\tilde{\lambda}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \exp\left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{\lambda}_i - 1 - \varepsilon\right) \varepsilon^{-1}\right) \to \max, \tilde{\lambda} \in R^m,$$

$$\tilde{x}_j(\tilde{\lambda}, \varepsilon) = \exp\left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{\lambda}_i - 1 - \varepsilon\right) \varepsilon^{-1}\right),\ j \in J,\ \varepsilon > 0. \qquad (1)$$

При $\varepsilon \to 0$ оптимальное значение аппроксимирующей функции $\varphi(\tilde{\lambda}, \varepsilon)$ сходится к оптимальным значениям целевых функций прямой и двойственной линейных задач: $\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \to \sum_{j=1}^{n} x_j^*$, $\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*$ и $\tilde{x}_j \to x_j^*$, $\tilde{\lambda}_i \to \lambda_i^*$, где x_j^* $j \in J$, λ_i^* $i \in I$ – оптимальные решения прямой и двойственной линейных задач [2]. Необходимым и достаточным условием максимума строго вогнутой функции $\varphi(\tilde{\lambda}, \varepsilon)$ является равенство нулю производных $\frac{\partial \varphi(\tilde{\lambda}, \varepsilon)}{\partial \tilde{\lambda}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j(\tilde{\lambda}, \varepsilon) - 1 = 0$, $i \in I$. Разложим функции $\tilde{x}_j(\tilde{\lambda}, \varepsilon)$ в степенной ряд по степеням $((\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{\lambda}_i - 1) - \varepsilon)$, $j \in J$ до производной первого порядка. Теперь необходимые и достаточные условия имеют вид: $\sum_{k=1}^{m} \tilde{\lambda}_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \varepsilon = 0$, $i \in I$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем аппроксимирующую систему линейных уравнений для вычисления двойственных аппроксимирующих переменных:

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{\lambda}_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i \in I. \qquad (2)$$

Переменные $\tilde{y}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{\lambda}_i - 1$ в (1) являются аппроксимацией двойственных ограничений $y_j \leq 0$. Если ограничение активно, то $\tilde{y}_j$, достигает своей максимальной величины и соответствующее значение x_j является оптимальным решением x_j^*. Таким образом, $\max_j \tilde{y}_j$ определяет индекс j оптимального решения x_j^*. Далее, исключая переменную x_j из целевой функции и ограничений задачи линейного программирования, получаем задачу меньшей размерности и вычисляем следующий индекс j оптимального решения x_j^*.

Применение алгоритма иллюстрирует следующий вычислительный пример: $\sum_{j=1}^{5} \hat{c}_j \hat{x}_j \to \min$, $\sum_{j=1}^{5} \hat{a}_{ij} \hat{x}_j = \hat{b}_i$, $i = 1,2,3$, $\hat{x}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 5$, $(\hat{c}_j) = (1\ 2\ 0{,}7\ 2\ 4)$, $(\hat{b}_i) = (1\ 4\ 2)$, $(\hat{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 2 & 3 \\ 0{,}3 & 4 & 0{,}3 & 3 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}1 & 3 & 1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Решение исходной линейной задачи: $\sum_{j=1}^{5} \hat{c}_j \hat{x}_j^* = 2{,}4367$, $(\hat{x}_j^*) = (0{,}0\ \ 0{,}7597\ \ 0{,}5530\ \ 0{,}2651\ 0{,}0)$, После преобразований, описанных выше, получаем: $F = \sum_{j=1}^{5} x_j \to \min$, $\sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j = 1$, $i = 1,2,3$, $0 \leq x_j \leq e^{-1}$, $j = 1, \dots, 5$,

$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 108{,}7313 & 21{,}7463 & 46{,}5991 & 108{,}7313 & 81{,}5485 \\ 8{,}1549 & 54{,}3656 & 11{,}6498 & 40{,}7742 & 3{,}3979 \\ 54{,}3656 & 2{,}7183 & 232{,}9956 & 27{,}1828 & 2{,}7183 \end{pmatrix}$. Решение: $\sum_{j=1}^{5} x_j^* = 0{,}02241$, $(x_j^*) = (0{,}0\ \ 0{,}0140\ \ 0{,}0036\ \ 0{,}0049\ \ 0{,}0)$, $(\lambda_i{}^*) = (0{,}0019\ 0{,}0175\ 0{,}0030)$, $(y_j^*) = (-0{,}4879\ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}7792)$. Аппроксимирующая система (2): $\begin{pmatrix} 32939{,}5073 & 7322{,}3284 & 20005{,}0400 \\ 7322{,}3284 & 4831{,}9243 & 4423{,}0664 \\ 20005{,}0400 & 4423{,}0664 & 57996{,}2489 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 367{,}3564 \\ 118{,}3423 \\ 319{,}9806 \end{pmatrix}$. Теперь вычисляем значения двойственных аппроксимирующих переменных $(\tilde{\lambda}_i) = (0{,}0073\ 0{,}0115\ 0{,}0021)$ и ограничений $(\tilde{y}_j,) = (0{,}0043\ \ -0{,}2119\ \ -0{,}0318\ \ 0{,}3206\ \ -0{,}3586)$. Наибольшее значение $\tilde{y}_4 = 0{,}3206$ определяет индекс $j = 4$ оптимального решения x_4^*. Далее исключаем переменную x_4 из целевой функции F и матрицы ограничений $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_j = 1$, $i = 1,2,3$, и преобразуем к виду: $\sum_{j=1,2,3,5} x_j \to \min$, $\sum_{j=1,2,3,5} a_{ij}x_j = 1$, $i = 1,2$, $0 \le x_j \le e^{-1}$, $j = 1,2,3,5$, $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3{,}8423 & 233{,}4043 & 115{,}6802 & 67{,}9846 \\ 209{,}1373 & 119{,}6861 & 420{,}1277 & 94{,}1167 \end{pmatrix}$. Пересчитываем коэффициенты аппроксимирующей системы (2). Получаем: $\begin{pmatrix} 72496{,}1231 & 83737{,}7412 \\ 83737{,}7412 & 243428{,}4278 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420{,}9113 \\ 843{,}0678 \end{pmatrix}$. Решение: $(\tilde{\lambda}_i) = (0{,}0030\ \ 0{,}0024)$ и $(\tilde{y}_j) = (-0{,}4797\ \ -0{,}0095\ \ 0{,}3686\ \ -0{,}5674)$. Наибольшее значение $\tilde{y}_3 = 0{,}3686$ определяет индекс $j = 3$ оптимального решения x_3^*. Исключаем переменную x_3 из целевой функции и системы ограничений, преобразуем линейную задачу к виду: $\sum_{j=1,2,5} x_j \to \min$, $\sum_{j=1,2,5} a_{ij}x_j = 1$, $i = 1$, $0 \le x_j \le e^{-1}$, $j = 1,2,5$, $(a_{ij}) = (0{,}4071\ \ 415{,}1550\ \ 173{,}0553)$. Пересчитываем коэффициенты аппроксимирующей системы (2). Получаем: $(202301{,}9342)\ (\tilde{\lambda}_1) = (588{,}6174)$. Решение аппроксимирующей системы (2): $(\tilde{\lambda}_1) = (0{,}0029)$, $(\tilde{y}_j) = (-0{,}9988\ \ 0{,}2079\ \ -0{,}4965)$ Наибольшее значение $\tilde{y}_2 = 0{,}2079$ определяет индекс $j = 2$ оптимального решения x_2^*.

Таким образом, переменные x_2, x_3, x_4 являются базисом оптимального решения. В исходной системе ограничений оставляем только 2, 3 и 4 столбцы. Полученная система линейных уравнений определяет оптимальные значения базисных переменных. Окончательно, решение исходной задачи линейного программирования: $\sum_{j=1}^{5} \hat{c}_j\hat{x}_j^* = 2{,}4367$, $(\hat{x}_j^*) = (0{,}0\ \ 0{,}7597\ \ 0{,}5530\ \ 0{,}2651\ 0{,}0)$.

Список литературы

1. *Гордуновский В.М.* Метод экспоненциальной аппроксимации для решения задач большой размерности // Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 220-222.

2. *Гордуновский В.М.* Метод экспоненциальной аппроксимации для планирования транспортной деятельности // Наука и экономика. 2010. № 2. С. 77-81.

Численное тестирование специального метода локального поиска в двухуровневых задачах с матричной игрой на нижнем уровне*

Т.В. Груздева, А.В. Орлов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,

Иркутск, Россия

Анализ различного сорта задач исследования операций с иерархической структурой с точки зрения разработки методов решения является в настоящее время актуальной проблемой математической оптимизации [1].

В работе рассматривается задача двухуровневой оптимизации [2] в оптимистической постановке с параметрической матричной игрой [3] на нижнем уровне:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c,x\rangle + \langle d_1,y\rangle + \langle d_2,z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z}, \\ x \in X = \{x \in R^m \mid Ax \le a,\ x \ge 0,\ \langle b_1,x\rangle + \langle b_2,x\rangle = 1\}, \\ (y,z) \in C(\Gamma M(x)), \end{array}\right\} \qquad (BP_{\Gamma M})$$

* Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00270-а.

где $C(\Gamma(x))$ − множество седловых точек игры

$$\left.\begin{array}{l}\langle y, Bz\rangle \uparrow \max\limits_{y},\ y \in Y(x) = \{y \mid y \ge 0, \langle e_{n_1}, y\rangle = \langle b_1, x\rangle\} \\ \langle y, Bz\rangle \downarrow \min\limits_{z},\ z \in Z(x) = \{z \mid z \ge 0, \langle e_{n_2}, z\rangle = \langle b_2, x\rangle\}\end{array}\right\} \qquad (\Gamma M(x))$$

$c, b_1, b_2 \in R^m$, $y, d_1 \in R^{n_1}$; $z, d_2 \in R^{n_2}$; $a \in R^p$; $b_1 \ge 0, b_1 \ne 0$, $b_2 \ge 0, b_2 \ne 0$; A, B − матрицы и $e_{n_1} = (1,...,1)$, $e_{n_2} = (1,...,1)$ − векторы соответствующих размерностей.

Заменой игры на нижнем уровне ее условиями оптимальности [4] задача $(BP_{\Gamma M})$ преобразуется в следующую невыпуклую задачу:

$$\left.\begin{array}{c}\langle c, x\rangle + \langle d_1, y\rangle + \langle d_2, z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z,v} \\ Ax \le a,\ x \ge 0,\ \langle b_1, x\rangle + \langle b_2, x\rangle = 1 \\ y \ge 0,\ \langle e_{n_1}, y\rangle = \langle b_1, x\rangle,\ \langle b_2, x\rangle (yB) \ge v e_{n_2} \\ z \ge 0,\ \langle e_{n_2}, z\rangle = \langle b_2, x\rangle,\ \langle b_1, x\rangle (Bz) \le v e_{n_1}\end{array}\right\} \qquad (PM)$$

Эквивалентность задач $(BP_{\Gamma M})$ и (PM) устанавливается следующим результатом.

Теорема [4]. Тройка (x^*, y^*, z^*) является глобальным оптимистическим решением двухуровневой задачи $(BP_{\Gamma M})$ тогда и только тогда, когда существует число v_* такое, что четверка (x^*, y^*, z^*, v_*) является глобальным решением задачи (PM).

Сложность решения задачи (PM) создает наличие $n_1 + n_2$ невыпуклых (d.c.) ограничений, которые можно свести к одному [5]. В результате получаем следующую задачу с d.c. ограничением (представимым в виде разности двух выпуклых функций):

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) \uparrow \max\limits_{x,y,z,v},\ (x, y, z) \in S \\ F(y, z, v) = g(y, z, v) - h(y, z) \le 0\end{array}\right\} \qquad (P)$$

где $S = \{x, y, z \ge 0 \mid Ax \le a, \langle b_1, x\rangle + \langle b_2, x\rangle = 1,\ \langle e_{n_1}, y\rangle = \langle b_1, x\rangle,\ \langle e_{n_2}, z\rangle = \langle b_2, x\rangle\}$,

$$F(y, z, v) = \max\left\{\max_{1 \le i \le n_1} \langle e_{n_1}, y\rangle (Bz)_i - v;\ v - \min_{1 \le j \le n_2} \langle e_{n_2}, z\rangle (yB)_j\right\} \le 0.$$

Для решения задачи *(P)* предлагается воспользоваться теорией глобального поиска в невыпуклых задачах с d.c. функциями [6]. С этой целью, прежде всего, необходимо получить явное представление функции *F(·)* в виде разности двух выпуклых функций.

Структура функции $F(y, z, v)$, задающей невыпуклое ограничение в задаче *(P),* достаточно сложна, однако удалось получить следующее ее d.c. представление:

$$g(y, z, v) = \max\{g_\phi + h_\psi; g_\psi + h_\phi\}, \quad h(y, z) = h_\psi + h_\phi,$$

где $g_\phi = \max\limits_{1 \le i \le n_1}\left\{g_i^\phi + \sum\limits_{j \ne i} h_j^\phi\right\} - v, \quad h_\phi = \sum\limits_{j=1}^{n_1} h_j^\phi, \quad g_\psi = \max\limits_{1 \le j \le n_2}\left\{h_j^\psi + \sum\limits_{i \ne j} g_i^\psi\right\} + v, \quad h_\psi = \sum\limits_{i=1}^{n_2} g_i^\psi,$

$$g_i^\phi(y, z) = \langle e_{n_1}, y\rangle (Bz)_i + \frac{1}{2}\mu_i \| y \|^2 + \frac{1}{2}\| \Lambda^i z \|^2, \quad h_i^\phi(y, z) = \frac{1}{2}\mu_i \| y \|^2 + \frac{1}{2}\| \Lambda^i z \|^2;$$

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{n_2} b_{ik} + \varepsilon_\mu,\ \varepsilon_\mu > 0, i = 1, \ldots, n_1, \quad \Lambda^i = \{\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{n_2}^i\},\ \lambda_k^i = n_1 b_{ik} + \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda > 0, k = 1, \ldots, n_2.$$

Далее в соответствии с теорией глобального поиска для осуществления локального поиска в задаче *(P)* применяется специальный метод, разработанный ранее для задач с одним невыпуклым ограничением [7], основу которого составляют спуск на поверхность уровня d.c. функции, задающей ограничение, и решение следующих линеаризованных (по базовой невыпуклости) задач:

$$\max\{g_\phi(y, z, v) + h_\psi(y, z); g_\psi(y, z, v) + h_\phi(y, z)\} - \langle \nabla h_\psi(y^r, z^r) + \nabla h_\phi(y^r, z^r), (y, z)\rangle \downarrow \min_{x,y,z,v},$$

$$f(x, y, z) \ge \rho_r = f(x^r, y^r, z^r), \quad (x, y, z) \in S.$$

Проведен вычислительный эксперимент по тестированию метода локального поиска в двухуровневых задачах с матричной игрой на нижнем уровне, продемонстрировавший

работоспособность предлагаемого метода.

Список литературы

1. *Pang J.-S.* Three modelling paradigms in mathematical programming // Mathematical programming. Ser.B. 2010. V. 125, № 2. P. 297–323.

2. *Dempe S.* Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.

3. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.

4. *Orlov A.V.* Bilevel problems with matrix and bimatrix games at the lower level and d.c. constraint optimization // Proceedings of the II Inter. conference OPTIMA-2011, Petrovac, Montenegro, 2011. P. 171–174.

5. *Horst R., Tuy H.* Global Optimization. Deterministic Approaches. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1993.

6. *Стрекаловский А.С.* Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями // ЖВММФ. 2005. Т. 45, № 3. С. 435–447.

7. *Груздева Т.В., Стрекаловский А.С.* Локальный поиск в задачах с невыпуклыми ограничениями // ЖВММФ. 2007. Т. 47, № 3. С. 397–413.

Эффективные методы решения задач оптимизации большой размерности*

Ю.Г. Евтушенко, А.И. Голиков

ВЦ РАН, Москва, Россия

Понятие большой размерности задачи оптимизации зависит от вида решаемой задачи и характеристик применяемой вычислительной техники. Характерное число переменных в задачах глобальной оптимизации, решаемых на современных вычислительных комплексах, измеряется десятками-сотнями. В задачах линейной оптимизации число переменных может достигать десятков миллионов. Рассматриваются методы, хорошо поддающиеся распараллеливанию: метод неравномерных покрытий и обобщенный метод Ньютона для задач линейного программирования (ЛП) и нахождения нормального решения систем линейных уравнений и неравенств.

Метод неравномерных покрытий для поиска глобального экстремума функций многих переменных был предложен Ю.Г.Евтушенко в 70-х годах [1]. Различные варианты метода были распараллелены, программно реализованы и использовались для расчетов прикладных задач на многопроцессорных системах. Метод был перенесен на многокритериальные и частично-целочисленные нелинейные задачи оптимизации [2], [3].

Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют неединственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек) дают возможность получать различные решения в случае неединственности. Так симплекс-метод находит решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. В [4] предложен метод решения задач ЛП, использующий новые вспомогательные функции типа модифицированной функции Лагранжа. Его применение к двойственной задаче ЛП дает возможность получить точную проекцию заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной минимизации вспомогательной выпуклой кусочно квадратичной функции для всех достаточно больших значений некоторого параметра. Подставляя найденную проекцию во вспомогательную функцию и вновь минимизируя ее, находится некоторое точное решение двойственной задачи линейного программирования. Предложен простой итеративный процесс, в котором, начиная с произвольного параметра, получаются точные решения прямой и двойственной задачи за конечное число шагов.

Вспомогательная кусочно квадратичная функция один раз дифференцируема. Для нее не существует матрица Гессе, но легко определяется обобщенная матрица Гессе. Поэтому для минимизации введенной вспомогательной функций используется обобщенный метод Ньютона, который в данном случае сходится за конечное число шагов. Это дало возможность решать на однопроцессорных компьютерах задачи ЛП с очень большим числом переменных (несколько десятков миллионов) при умеренном числе ограничений (несколько тысяч). Сравнение с некоторыми известными коммерческими (например, CPLEX) и исследовательскими программами показали полное преимущество программной реализации нового

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00786), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5264.2012.1) и программы Президиума РАН П-18.

метода в системе MATLAB при решении задач большой размерности и близкие результаты по времени решения задач невысокой размерности.

Обобщенный метод Ньютона хорошо поддается распараллеливанию. Было реализовано несколько параллельных схем предложенного метода в зависимости от вида разбиения исходной матрицы ограничений на блоки. Каждая из предложенных схем имеет свои достоинства и недостатки, чем и определяется область их применения.

В [5] приведены некоторые результаты вычислительного эксперимента с тремя параллельными вариантами обобщенного метода Ньютона для решения задач линейного программирования. Расчеты проводились на кластере МВС-6000IM, состоящем из двухпроцессорных узлов на основе Intel Itanium 2 с частотой 1.6 GHz, соединенными сетью Myrinet 2000. При решении задач ЛП с одним миллионом неизвестных и при десяти тысячах ограничений с помощью клеточной схемы разбиения матрицы ограничений на 144 процессорах было достигнуто ускорение расчетов примерно в 50 раз, время счета составило 28 сек. Задача ЛП с двумя миллионами переменных при двухстах тысячах ограничений на 80 процессорах была решена с помощью "безматричной" схемы менее, чем за 40 минут. С помощью столбцовой схемы разбиения матрицы ограничений задача ЛП с максимальным количеством переменных 60 млн. при четырех тысячах ограничений была решена на 128 процессорах за 140 сек.

Список литературы

1. *Евтушенко Ю.Г.* Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке). // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1971. Т. 11, № 6. С. 1390-1403.

2. *Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А.* Варианты метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично-целочисленных нелинейных задач. // Докл. РАН. 2011. Т. 437, № 2. С. 168–172.

3. *Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А.* Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с гарантированной точностью. // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2013. Т. 53, № 2. С. 39–54.

4. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Метод решения задач линейного программирования большой размерности. // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 6. С. 727-732.

5. *Гаранжа В.А., Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Нгуен М.Х.* Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования. // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1369-1384.

О разрешимости задачи линейного программирования при минимальной по евклидовой норме матричной коррекции её допустимой области

В.И. Ерохин, А.С. Красников, М.Н. Хвостов

СПбГТИ(ТУ), Санкт-Петербург, Россия

Работа основана на результатах из [1–3] и является дальнейшим развитием работы [4]. Пусть

$L(A,b,c): Ax = b,\ x \ge 0,\ c^{\mathrm{T}}x \to \max$

– некоторая задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме,

$L^*(A,b,c): u^{\mathrm{T}}A \ge c^{\mathrm{T}},\ b^{\mathrm{T}}u \to \min$

– двойственная ей задача ЛП в стандартной форме, где $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $c, x \in \mathbf{R}^n$, $b, u \in \mathbf{R}^m$, $X(A,b) \triangleq \{x \mid Ax = b,\ x \ge 0\}$ – допустимое множество задачи $L(A,b,c)$, $U(A,c) \triangleq \{u \mid u^{\mathrm{T}}A \ge c^{\mathrm{T}}\}$

– допустимое множество задачи $L^*(A,b,c)$.

Хорошо известно [2], что задачи $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ разрешимы тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия $X(A,b) \ne \varnothing$ и $U(A,c) \ne \varnothing$. Если задачи $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ неразрешимы, возможны следующие три случая:

1. $X(A,b) = \varnothing$, $U(A,c) \ne \varnothing$, $L(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода, $L^*(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 2-го рода.

2. $X(A,b) \ne \varnothing$, $U(A,c) = \varnothing$, $L(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 2-го рода, $L^*(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода.

3. $X(A,b) = \varnothing$, $U(A,c) = \varnothing$, $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ – несобственные задачи ЛП 3-го рода.

В настоящей работе рассматривается несобственная задача $L(A,b,c)$ 1-го или 3-го рода.

Задачей $D_{[H-h]}$ матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $[H-h]\in\mathbf{R}^{m\times(n+1)}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей разрешимость скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b+h,c):(A+H)x=b+h,\ x\ge 0,\ c^{\mathrm{T}}x\to\max,\\ L^*(A+H,b+h,c):u^{\mathrm{T}}(A+H)\ge c^{\mathrm{T}},\ (b+h)^{\mathrm{T}}u\to\min. \end{cases}$$

Задачей D_H матричной коррекции только левых частей ($h=0$) пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $H\in\mathbf{R}^{m\times n}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей совместность скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b,c):(A+H)x=b,\ x\ge 0,\ c^{\mathrm{T}}x\to\max,\\ L^*(A+H,b,c):u^{\mathrm{T}}(A+H)\ge c^{\mathrm{T}},\ b^{\mathrm{T}}u\to\min. \end{cases}$$

Одновременно с задачами $D_{[H-h]}$ и D_H будем рассматривать коррекцию противоречивой системы ограничений задачи $L(A,b,c)$, формализованную с помощью задач

$$P_{[H-h]}:\begin{cases} \|[H-h]\|\to\min,\\ X\left(A+H,b+h\right)\ne\varnothing, \end{cases}\qquad P_H:\begin{cases} \|H\|\to\min,\\ X\left(A+H,b\right)\ne\varnothing, \end{cases}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова матричная (далее в зависимости от контекста матричная или векторная) норма.

Теорема 1. Пусть $L(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 1-го или 3-го рода. Тогда задачи P_H и D_H разрешимы (не разрешимы) при одних и тех же условиях. Решения указанных задач совпадают. Если матрица $H^*\in\mathbf{R}^{m\times n}$ является решением задач P_H и D_H, то справедливо представление

$$H^*=\left(b-Ax^*\right)\frac{x^{*\mathrm{T}}}{x^{*\mathrm{T}}x^*},$$

где

$$x^*\in\operatorname*{Argmin}_{x\ge 0}\frac{\|b-Ax\|}{\|x\|}.$$

При этом

$$\|H^*\|=\frac{\|b-Ax^*\|}{\|x^*\|},$$

$x^*\in X\left(A+H^*,b\right)$ – решение задачи $L(A+H^*,b,c)$.

Теорема 2. Пусть $L(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 1-го или 3-го рода. Тогда задачи $P_{[H-h]}$ и $D_{[H-h]}$ разрешимы (не разрешимы) при одних и тех же условиях. Решения указанных задач совпадают. Если матрица $[H^*-h^*]\in\mathbf{R}^{m\times(n+1)}$ является решением задач P_H и D_H, то справедливо представление

$$[H^*-h^*]=\frac{\left(b-Ax^*\right)\cdot\left[x^{*\mathrm{T}}\ \ 1\right]}{x^{*\mathrm{T}}x^*+1},$$

где

$$x^*\in\operatorname*{Argmin}_{x\ge 0}\frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2+1}.$$

При этом

$$\|[H^*-h^*]\|^2=\frac{\|b-Ax^*\|^2}{\|x^*\|^2+1},$$

$x^*\in X\left(A+H^*,b+h^*\right)$ – решение задачи $L(A+H^*,b+h^*,c)$.

Список литературы

1. *Горелик В.А.* Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 24, № 11. С. 1697–1705.

2. *Ерёмин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

3. *Ерохин В.И.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 4. С. 587–601.

4. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования // Автомат. и телемех. 2012. № 2. С. 11–24.

Об алгоритме поиска экстремума в классах функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой

А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

Эффективность ряда методов поиска экстремума функций многих переменных зависит от быстрого решения вспомогательных одномерных задач. Поэтому представляется естественным использовать для их решения оптимальные алгоритмы. В тоже время указанные алгоритмы, как правило, являются достаточно сложными и их использование на практике затруднено в связи с решением возникающих при их реализации вспомогательных задач (см., например, [1, 2]). В связи с этим возникает задача построения приближенно-оптимальных алгоритмов достаточно простых в реализации и сохраняющих ряд свойств оптимальных алгоритмов.

В докладе рассматривается задача построения такого рода алгоритма для класса многоэкстремальных функций, определяемого кусочно-линейной мажорантой, и содержащего вогнутые, выпуклые и удовлетворяющие условию Липшица функции. Рассматриваемый класс функций замкнут относительно ряда естественных операций таких, как взятие минимума, максимума, суммирования с неотрицательными коэффициентами по конечному набору функций. Данный класс функций порождает класс функций одной переменной, являющейся подклассом класса, рассмотренного в [1]. Построена точная верхняя мажоранта, позволяющая оценить погрешность в определении наибольшего значения любой функции из подкласса указанного класса, определяемого результатами проведенных вычислений. На основе концепции одношаговой оптимальности построен алгоритм поиска наибольшего значения функции из описанного выше подкласса. Приведены оценки, связывающие построенный алгоритм с оптимальным одношаговым алгоритмом. Разработаны как последовательная, так и параллельная версии указанного алгоритма. Обсуждаются вопросы использования построенных алгоритмов в диагональных методах оптимизации функций многих переменных.

Список литературы

1. *Коротченко А.Г.* Об одном алгоритме поиска наибольшего значения одномерных функций //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т.18 №3. С. 563-573.

2. *Коротченко А.Г., Бобков А.Н.* Об одном алгоритме поиска экстремума в классах функций, определяемых кусочно-степенными мажорантами //Вестник ННГУ, сер. «Математическое моделирование и оптимальное управление». Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2004. вып. 1(27). С.194-202.

Определение коэффициентов штрафа и формирование точных штрафных функций

Ю.П. Лаптин

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

В настоящее время метод точных штрафных функций широко используется при решении оптимизационных задач с ограничениями (см., например, [1–3]). Существенной проблемой при этом является отсутствие простых методик вычисления приемлемых значений штрафных коэффициентов. В докладе рассматриваются подходы [4], позволяющие определять такие значения по ходу работы оптимизационного алгоритма. Сложности также возникают, если функции, описывающие исходную задачу, определены не на всем пространстве переменных. Для такого случая предлагается использовать специальные продолжения функций с допустимого множества исходной задачи на все пространство переменных [5–6].

1. Рассматриваются две задачи: первая – найти

$$f^* = \min\{ f(x) : x \in C \}, \qquad (1)$$

где $C = \{ x \in R^n : h(x) \le 0 \}$, $f, h : R^n \to R$ – выпуклые функции, принимающие конечные значения при любых x, C – компактное множество;

вторая – выпуклая задача, связанная со штрафной функцией $S(x,s) = f(x) + s \cdot h^+(x)$, $s \in R,\ s \ge 0$, где $h^+ = \max\{0, h\}$: найти

$$S^*(s) = \min\{ S(x,s) : x \in R^n \}. \qquad (2)$$

Штрафная функция $S(x,s)$ называется точной при заданном значении штрафного коэффициента s, если $S^*(s) = f^*$ и решения задач (1) и (2) совпадают.

Пусть $S'(x,s,p)$, $f'(x,p)$, $h'(x,p)$ – производные функций S, f, h в точке $x \in R^n$ по направлению p при фиксированном значении s. Обозначим $p(x,y) = (y-x)/\|y-x\|,\ y \ne x$. Для точек $x \notin C$, $y \in C$ положим $\pi_C(x,y)$ – точка пересечения отрезка $[x,y]$ с границей множества C.

Теорема 1. *Пусть заданы точка $y^0 \in C$, числа $\varepsilon > 0$, $s > 0$, последовательность $x^k \in R^n,\ k = 0,1,\ldots$, сходится к решению $\tilde{x}$ задачи (2), и для каждой точки x^k, $x^k \notin C$, $k = 0,1,\ldots$ выполняется условие*

$$S'(\bar{x}^k, s, p(\bar{x}^k, x^k)) = f'(\bar{x}^k, p(\bar{x}^k, x^k)) + s \cdot h'(\bar{x}^k, p(\bar{x}^k, x^k)) \ge \varepsilon, \qquad (3)$$

где $\bar{x}^k = \pi_C(x^k, y^0)$. Тогда $\tilde{x}$ – решение задачи (1), $S(x,s)$ – точная штрафная функция.

В [4] показано, что при $h(y^0) < 0$ существует $\bar{s} < \infty$ такое, что условие (3) выполняется при любом s, $s > \bar{s}$.

Рассмотрим вопросы варьирования точки y^0. Пусть каждой точке последовательности $x^k \in R^n,\ k = 0,1,\ldots$, порождаемой оптимизационным алгоритмом при решении задачи (2), некоторым образом поставлена в соответствие точка $y^k \in C$. В [4] показано, что утверждение теоремы 1 остается верным, если в качестве $\bar{x}^k$ использовать точку $\bar{x}^k = \pi_C(x^k, y^k)$. Будем выбирать точки y^k на каждой итерации оптимизационного алгоритма так, чтобы неравенство (3) выполнялось при наименьшем значении штрафного коэффициента. Пусть $x \notin C$ $y \in C$. Обозначим $r(x,y) = \max\left\{0, -\dfrac{f'(x, p(x,y))}{h'(x, p(x,y))}\right\}$,

$$r(x) = \min\{ r(\bar{x}, x) : \bar{x} = \pi_C(x,y), y \in C \}, \qquad (4)$$

$$r^* = \sup\{ r(x) : x \notin C \}. \qquad (5)$$

Лемма 1. *Пусть $s > r^*$, тогда $S(x,s)$ – точная штрафная функция.*

Пусть $f, h_i : R^n \to R,\ i = 1,\ldots,m$ – выпуклые собственные функции,

$$f^* = \min\{ f(x) : h_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots,m,\ x \in R^n \}. \qquad (6)$$

Известно (см., например, [1]), что $S(x,s)$ – точная штрафная функция, если $s > s^* = \sum_{i=1}^{m} u_i^*$, где $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ – оптимальные значения двойственных переменных для задачи (6).

Рассмотрим случай, когда (6) является задачей линейного программирования, т.е. $f(x) = \langle c, x \rangle$, $h_i(x) = \langle a_i, x \rangle + b_i,\ i = 1,\ldots,m$, $h(x) = \max\{ h_i(x) : i = 1,\ldots,m \}$.

Теорема 2. *Пусть задача линейного программирования (6) имеет единственное ре-шение, $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ – оптимальные значения двойственных переменных. Тогда $r^* = \sum_{i=1}^{m} u_i^*$.*

Таким образом, предлагаемый подход приводит к тому же предельному значению штрафного коэффициента. Любое правило выбора точки y^k на каждой итерации оптимизационного алгоритма может рассматриваться, как использование приближенного решения задачи (4). При этом не возникает необходимость определения оптимальных значений двойственных переменных.

2. Рассмотрим случай, когда функции, описывающие исходную задачу, определены не на всем пространстве переменных. Предполагается, что заданы точка $x^0 \in \operatorname{int} C$, число $E, E < f(x^0)$, и $C \subseteq \operatorname{dom} f \bigcap \operatorname{dom} h$. Для $x \notin C$ обозначим $\pi_C(x)$ точку пересечения отрезка $\left[x, x^0\right]$ с границей множества C. Одномерный поиск точки $\pi_C(x)$ реализуется достаточно эффективно. Обозначим

$$\chi_E(x) = E + (f(\pi_C(x)) - E)\frac{\left\|x - x^0\right\|}{\left\|\pi_C(x) - x^0\right\|}, \quad \psi_E(x) = \begin{cases} \chi_E(x), \text{ если } x \notin C, \\ f(x), \text{ если } x \in C. \end{cases}$$

Функцию $\psi_E(x)$ назовем коническим продолжением функции $f(x)$ с множества C на R^n. Рассмотрим задачу: найти

$$\psi_E^* = \inf\left\{\psi_E(x) : x \in R^n\right\}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть* $E \le f^*$, *тогда* $\psi_E^* = f^*$.

Теорема 3. *Пусть* f *– выпуклая функция,* C *– замкнутое выпуклое множество,* $C \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f$, $x^0 \in \operatorname{int} C$. *Тогда существует конечное* E^* *такое, что для всех* $E \le E^*$ *функция* $\psi_E(x)$ *выпуклая.*

Обозначим $g_f(x)$, $g_h(x)$ – субградиенты функций f и h в точке x.

Теорема 4. *Пусть* $E \le E^*$, $\bar{x} = \pi_C(x)$, $x \ne x^0$. *Тогда* $(g_h(\bar{x}), x^0 - \bar{x}) \ne 0$ *и вектор*

$$g = g_f(\bar{x}) + \frac{E - f(\bar{x}) - \left\langle g_f(\bar{x}), x^0 - \bar{x}\right\rangle}{\left\langle g_h(\bar{x}), x^0 - \bar{x}\right\rangle} g_h(\bar{x})$$

есть субградиент функции $\chi_E(x)$ *в точке* x.

Пусть для решения задачи (7) используется сходящийся алгоритм A безусловной минимизации выпуклых функций, на каждой итерации которого вычисляются значение минимизируемой функции и ее субградиент. Обозначим $f'(x, p)$ производную функции f в точке x по направлению p, $p(x) = \dfrac{x - x^0}{\left\|x - x^0\right\|}$.

Теорема 5. *Пусть заданы число* $\delta > 0$ *и значение величины* E, *для точек* $x^k \notin C$, *получаемых алгоритмом* A *на итерации* k, $k = 0, 1, \ldots$, *выполняются условия*

$$E < f(\bar{x}^k) - \delta, \tag{8}$$

$$E < f(\bar{x}^k) - f'(\bar{x}^k, p(\bar{x}^k)) \cdot \left\|\bar{x}^k - x^0\right\|, \tag{9}$$

где $\bar{x}^k = \pi_C(x^k)$. *Тогда последовательность* $x^k, k = 0, 1, \ldots$, *сходится к решению задачи (1).*

Если условия (8), (9) на некоторой итерации не выполняются, величина E уменьшается. Вычислительный эксперимент показывает устойчивость разработанного подхода к плохой обусловленности и плохому масштабированию задач. Разработанные программы размещены на сайте http://www.icyb.kiev.ua/file/NonDiffOpt_Nurm/indexk.htm.

Определенные проблемы могут возникать при использовании предложенного подхода, если целевая функция не удовлетворяет условию Липшица на допустимом множестве. Для преодоления таких проблем предлагается использовать конические аппроксимации функций [6].

Список литературы

1. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Amsterdam / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 381 p.

2. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Точные вспомогательные функции в задачах оптимизации // ЖВМ и МФ. – 1990. – Т. 30. – № 1. – С. 43–57.

3. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высш. шк., 2005. – 335 с.

4. *Лаптин Ю.П.* Некоторые вопросы опредления коэффициентов негладких штрафных функций // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2012. – № 11. С. 73-79.

5. *Лаптин Ю.П.* Один подход к решению нелинейных задач оптимизации с ограничениями // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 182–187.

6. *Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А.* Некоторые подходы к регуляризации нелинейных задач оптимизации // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 57–68.

Задача проектирования нулевой точки на квадрику*

Д.М. Лебедев

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается задача нахождения точки на квадрике, имеющую наименьшую евклидову норму. В зависимости от знака свободного члена квадратичной функции, задающей квадрику, исходная задача разбивается на две, в каждой из которых строится многочлен степени $2n$ и определяются его положительные корни. По найденным положительным числам определяются точки, лежащие на квадрике и имеющие наименьшую евклидову норму.

Рассмотрим оптимизационную задачу: найти

$$\inf_{x\in X}\|x\|, \qquad (1)$$

где

$$X=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x)=0\right\},$$

$$\varphi_1(x)=\left\langle Ax,x\right\rangle+2\left\langle b_1,x\right\rangle+c,\quad x,b_1\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R},$$

A – матрица порядка $[n\times n]$ и $\|*\|$ – евклидова норма. Нетрудно видеть, что оптимальное значение в (1) может быть получено из решения следующей задачи:

$$\min_{x\in X}\left\langle x,x\right\rangle \qquad (2)$$

Как известно [1], задача (2) является классической задачей оптимизации. Так как матрица A симметричная, то все ее собственные числа λ_i, $(i=1,...,n)$ вещественные. Поэтому существует такая ортогональная матрица Q [2], что линейное преобразование $y=Q^Tx$ приводит функцию $\varphi_1(x)$, определяющую множество X, к виду

$$\varphi(y)=\langle\Lambda y,y\rangle+2\langle Q^Tb_1,y\rangle+c,$$

где $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ – диагональная матрица порядка $[n\times n]$.

Обозначим,

$$Y=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \varphi(y)=0\},$$

$$\varphi(y)=\langle\Lambda y,y\rangle+2\langle b,y\rangle+c=0,\quad y,b\in\mathbb{R}^n,\quad b=Q^Tb_1, c\in\mathbb{R},$$

Таким образом, наряду с (2) рассмотрим задачу:

$$\min_{y\in Y}\langle y,y\rangle \qquad (3)$$

Если решение y^* задачи (3) найдено, то точка $x^*=Qy^*$ будет решением задачи (2).

Рассмотрим три случая.

а) Пусть $c=0$. Тогда $x^*=0_n$ является решением (1).

б) Пусть $c>0$. Тогда для нахождения точки минимума (3) решим следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{y\in Y_1}\langle y,y\rangle, \qquad (4)$$

где

$$Y_1=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle\Lambda y,y\rangle+2\langle b,y\rangle+c\le 0\right\},\quad y,b\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}.$$

Если точка $y^*\in Y_1$ – решение задачи (4), то необходимо существование такого числа $\mu^*>0$, для которого выполняется равенство

$$\Lambda y^*+\mu^*y^*=-b. \qquad (5)$$

в) Пусть $c<0$. Тогда для нахождения точки минимума (3) решим следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{y\in Y_2}\langle y,y\rangle, \qquad (6)$$

где

$$Y_2=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, -\langle\Lambda y,y\rangle-2\langle b,y\rangle-c\le 0\right\},\quad y,b\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Всероссийского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00360).

В этом случае, если точка $y^* \in Y_2$ – решение задачи (5), то необходимо существование такого числа $\mu^* > 0$, для которого выполняется равенство

$$\Lambda y^* - \mu^* y^* = -b.$$

В обоих случаях число μ^* является множителем Лагранжа для задач (4) и (5). Кроме того, в точке минимума $y^* \in Y_i, i = 1,2,$ должно выполняться равенство

$$\langle \Lambda y^*, y^* \rangle + 2\langle b, y^* \rangle + c = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай, когда $b \neq 0_n, c > 0$. Преобразуем условие (5). Имеем

$$(\Lambda + \mu^* E) y^* = -\frac{b}{2},$$

где E – единичная матрица.

Определим

$$y = -\frac{1}{2}(\Lambda + \mu E)^{-1} b = \left(-\frac{b_1}{2(\lambda_1 + \mu)}, -\frac{b_2}{2(\lambda_2 + \mu)}, \ldots, -\frac{b_n}{2(\lambda_n + \mu)} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Подставляя y в (6), имеем

$$0 = \langle \Lambda y, y \rangle + \langle b, y \rangle + c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i b_i^2}{4(\lambda_i + \mu)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{2(\lambda_i + \mu)} + c.$$

Поэтому, для того чтобы решить это уравнение, необходимо найти корни многочлена $P(\mu)$ степени $2n$

$$P(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \left[(2\mu + \lambda_i) b_i^2 \prod_{k=1, k \neq i}^{n} (\lambda_k + \mu)^2 \right] - 4c \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu)^2 \qquad (8)$$

Таким образом, задача нахождения точки, ближайшей к множеству Y_1, свелась к задаче определения положительных корней многочлена вида (7) степени 2n. Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен степени $2n$ имеет ровно $2n$ корней.

Замечание 1. Для некоторых типов квадрик из решения данного уравнения возможно найти точки максимально удаленные от нуля.

Замечание 2. Аналогичный подход используется в статье [3] для решения минимаксной задачи определенного вида.

Список литературы

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 стр.
2. Фаддеев Д.К.. Лекции по алгебре. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 416с.
3. Полякова Л. Н. Некоторые методы минимизации максимума квадратичных функций // Владикавказский математический журнал. 2006. Том 8. Вып 4. С. 47-57.

Построение управления, обеспечивающего выполнение фазовых и смешанных ограничений*

А.Д. Мижидон, К.А. Мижидон

ВСГУТУ, Улан-Удэ, Россия

В работе рассматривается задача управления линейной динамической системой (1), в которой основной целью управления является удержание системы при заданном детерминированном возмущении в фазовых (3) и смешанных ограничениях (4):

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad x(0) = x^0, \ t \in [0, T] \qquad (1)$$

$$u'(t) R_j u(t) \leq 1, \quad (j = 1, 2, ..., p), \qquad (2)$$

$$x'(t) Q_i x(t) \leq 1, \quad (i = 1, 2, ..., s), \qquad (3)$$

$$x'(t) P_k u(t) \leq 1, \quad (k = 1, 2, ..., q), \qquad (4)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №12-08-00309-а)

где x - n-мерный вектор фазовых координат системы; u - r-мерный вектор управления; A - постоянная $(n \times n)$-матрица; B - постоянная $(n \times r)$-матрица; R_j - положительно-определенная ($r \times r$)-матрица; Q_i - неотрицательно-определенные $(n \times n)$-матрицы; P_k - положительно-определенная ($n \times r$)-матрица; $f(t)$ - n-мерный вектор внешних возмущений. Вектор-функция $f(t)$ является ограниченной при $t \geq 0$.

Для решения задачи (1)-(4) предлагается рассмотреть вспомогательную задачу оптимального управления с квадратичным критерием качества:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad x(0) = x^0, \\ x(t), f(t) \in E^n, \ u(t) \in E^r, \ t \in [0,T], \\ J(u(\cdot)) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T (x'Q(\alpha)x + x'P(\beta)u + u'R(\gamma)u)dt \to \min \end{cases} \tag{5}$$

где $Q(\alpha)$, $P(\beta)$, $R(\gamma)$ - матрицы соответственно размерности $(n \times n)$, $(n \times r)$ $(r \times r)$, зависящие от некоторых весовых коэффициентов, выбор которых в конечном итоге обеспечивает при оптимальном управлении выполнение фазовых и смешанных ограничений (3)-(4). Данная задача (5) является обобщением задачи аналитического конструирования оптимального регулятора [1].

Применение принципа максимума к решению задачи (5) сводит ее к решению краевой задачи принципа максимума. В данном докладе для решения краевой задачи принципа максимума и для построения итерационной процедуры выбора весовых коэффициентов, обеспечивающих выполнение ограничений (3)-(4), предлагается подход, основанный на представлении фундаментальной матрицы системы в виде матричной экспоненты, разложенной в матричный ряд. Рассмотрен модельный пример.

Список литературы

1. *Мижидон А.Д.* Об одной задаче аналитического конструирования оптимального регулятора// АиТ. 2011. № 11. С. 102–116.

Двухуровневые оптимизационные модели для задач автомобильного и железнодорожного транспорта*

А.В. Орлов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

Исследование экономических систем, которые как правило, обладают иерархической структурой, зачастую приводит к постановкам задач оптимизации, в которых требуется учитывать цели и ограничения разных уровней иерархии. Наиболее удобным инструментом моделирования задач, возникающих в иерархических системах, в настоящее время является двухуровневая оптимизация (программирование) [1], позволяющая записывать и одновременно учитывать интересы двух соседних уровней такой системы. Такой подход к моделированию является сравнительно новой областью и пользуется невысокой популярностью из-за высокой трудности двухуровневых задач для численного исследования. Тем не менее, вследствие развития численных методов и технологий многопоточных вычислений, в последнее время популярность этого подхода стала возрастать. При этом не вызывает сомнений возможность более адекватного описания ситуации с помощью двухуровневой модели.

Примером подобного сорта задач могут служить так называемые задачи назначения тарифов (Toll Setting Problems) (см., например, [2]). Одна из задач этого класса – задача оптимального выбора тарифов телекоммуникационным оператором была исследована автором в работе [3].

Кроме того, моделирование с помощью двухуровневой оптимизации может быть полезно и при исследовании ряда задач на автомобильном и железнодорожном транспорте.

Одной из таких задач, исследуемых в данной работе является задача улучшения шоссейных дорог действующей дорожной сети какого-либо региона [4]. Кратко опишем ее постановку. Пусть игроком верхнего уровня уровня будет проектировщик дорожной сети, который отражает интересы администрации региона, а игрок нижнего уровня – «пользователь» дорог (например, транспортные

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 11-01-00270-а, 12-07-33045-мол_а_вед, 12-07-13116-офи_м_РЖД)

компании). Будем считать, что проектировщик сети имеет возможность только лишь расширения существующих дорог. Задача строительства новых дорог в данной модели не рассматривается.

Введем в рассмотрение ориентированный граф G, который задается тройкой $G=(V,U,A)$, где V – множество городов, соединенных сетью дорог ($|V|=m$), U – множество дуг, соответствующих возможным направлениям движения между городами (узлами графа) ($|U|=n$), A – матрица инцидентности графа G размера $n\times m$.

Пусть, кроме того, $x\in R^n$ – стратегия игрока верхнего уровня, где каждая компонента $x_i\ge 0$ стратегии – планируемое увеличение пропускной способности, соответствующее дуге $i\in U$. Стратегия $(y,z)\in R^n\times R^{nm}$ игрока нижнего уровня включает в себя величину транспортного потока $y_i\ge 0$ по каждой дуге $i\in U$, а также транспортные потоки $z_{ij}\ge 0$, $i\in U$, $j\in V$ по дуге i в город j. При этом должно выполняться условие согласования транспортных потоков: $\sum_{j\in V} z_{ij}=y_i \quad \forall i\in U.$

Пусть $(x_i,y_i)\mapsto \varphi_i(x_i,y_i)$ – функция стоимости перевозки по дуге $i\in U$ (отражающая, например, время в пути, затраты на топливо и т.п.), а отображение $x_i\mapsto f_i(x_i)$ соответствует затратам на увеличение пропускной способности на x_i для дуги $i\in U$ (расширение дорог). Предполагаем, что функции $\varphi_i(\cdot)$ и $f_i(\cdot)$ являются выпуклыми.

Далее, игрок нижнего уровня осуществляет фиксированные объемы перевозок d_{kj} из города $k\in V$ в город $j\in V$, которые накладывают ограничение на транспортные потоки: $\sum_{i\in U} a_{ik}z_{ij}=d_{kj} \quad \forall k,j\in V.$ Цель игрока верхнего уровня – оптимальное распределение инвестиций на улучшение дорог при минимизации суммарной функции стоимости перевозок. При этом учитываются предпочтения игрока нижнего уровня, который в свою очередь стремится минимизировать свои выпуклые функции стоимости перевозок $\varphi_i^0(\cdot)$, $i\in U$.

Таким образом, возникает следующая задача двухуровневой оптимизации:

$$\begin{cases} \sum_{i\in U}[\varphi_i(x_i,y_i)+\tau\cdot f_i(x_i)]\downarrow \min\limits_{x,y,z}, \quad 0\le x\le \bar{x}, \quad (y,z)\in \mathop{Arg}\limits_{y,z}\min\{\sum_{i\in U}\varphi_i^0(x_i,y_i)\,| \\ \quad |0\le y\le \bar{y}, \quad z\ge 0, \quad \sum_{j\in V} z_{ij}=y_i \ \ \forall i\in U, \ \sum_{i\in U} a_{ik}z_{ij}=d_{kj} \ \ \forall k,j\in V\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\tau>0$ – множитель, позволяющий конвертировать стоимость затрат на расширение дорог в единицы, в которых измеряется стоимость перевозки. Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ задают ограничения сверху на увеличение пропускной способности дуг и транспортный поток соответственно.

Поскольку, вообще говоря, игроки верхнего и нижнего уровня могут не обладать полной информацией о функциях стоимости перевозок $\varphi_i(\cdot)$ и $\varphi_i^0(\cdot)$ по дугам $i\in U$, то в качестве этих функций можно рассматривать, например, их кусочно-линейные аппроксимации:

$$\tilde{\varphi}_i(x_i,y_i)=\max_l\{0;q_{li}y_i-p_{li}x_i+r_{li}\,|\,l=1,2,\ldots,I_i\} \quad \forall i\in U, \tag{2}$$

$$\tilde{\varphi}_i^0(x_i,y_i)=\max_l\{0;q_{li}^0y_i-p_{li}^0x_i+r_{li}^0\,|\,l=1,2,\ldots,J_i\} \quad \forall i\in U, \tag{3}$$

где I_i, J_i – количество сегментов в кусочно-линейной аппроксимации соответствующей функции стоимости перевозки по дороге $i\in U$; p_{li}, q_{li}, r_{li} и p_{li}^0, q_{li}^0, r_{li}^0 – коэффициенты уравнений прямых, составляющих эти аппроксимации. Аналогично вместо функции затрат $f_i(\cdot)$ на увеличение пропускной способности дуги $i\in U$ будем рассматривать ее кусочно линейную аппроксимацию: $\tilde{f}_i(x_i)=\max_l\{0;a_{li}x_i+b_{li}\,|\,l=1,2,\ldots,K_i\} \quad \forall i\in U.$

Таким образом, мы получаем следующую двухуровневую задачу:

$$\begin{cases} \sum_{i\in U}[\tilde{\varphi}_i(x_i,y_i)+\tau\cdot \tilde{f}_i(x_i)]\downarrow \min\limits_{x,y,z}, \quad 0\le x\le \bar{x}, \quad (y,z)\in \mathop{Arg}\limits_{y,z}\min\{\sum_{i\in U}\tilde{\varphi}_i^0(x_i,y_i)\,| \\ \quad |0\le y\le \bar{y}, \quad z\ge 0, \quad \sum_{j\in V} z_{ij}=y_i \ \ \forall i\in U, \ \sum_{i\in U} a_{ik}z_{ij}=d_{kj} \ \ \forall k,j\in V\}, \end{cases} \tag{4}$$

которая, вообще говоря, является негладкой. Для того чтобы избавиться от негладкости в задаче (4), введем дополнительные переменные $u\in R^n$, $v\in R^n$ и $w\in R^n$, и рассмотрим следующую задачу двухуровневой оптимизации:

$$\begin{cases} \sum_{i\in U}[u_i+\tau\cdot w_i]\downarrow \min_{x,u,w,y,z,v}, \quad 0\le x\le \bar{x}, \quad u\ge 0, \quad w\ge 0, \\ u_i\ge q_{li}y_i-p_{li}x_i+r_{li} \quad \forall i\in U, \quad \forall l\in\{1,2,\dots,I_i\}, \\ w_i\ge a_{li}x_i+b_{li} \quad \forall i\in U, \ \forall l\in\{1,2,\dots,K_i\}, \\ (y,z,v)\in Arg\min_{y,z,v}\{\sum_{i\in U}v_i \mid 0\le y\le \bar{y}, \quad z\ge 0, \quad v\ge 0, \ \sum_{j\in V}z_{ij}=y_i \ \ \forall i\in U, \\ \sum_{i\in U}a_{ik}z_{ij}=v_{kj} \ \ \forall k,j\in V, \ \ v_i\ge q_{li}^0y_i-p_{li}^0x_i+r_{li}^0 \quad \forall i\in U, \quad \forall l\in\{1,2,\dots,J_i\}\}. \end{cases} \tag{5}$$

Можно показать, что задачи (5) и (6) эквивалентны в следующем смысле.

Предложение 1. *Пусть* $(x_*,u_*,w_*,y_*,z_*,v_*)$ *является решением задачи* (5). *Тогда* (x_*,y_*,z_*) *– решение задачи* (4). *И, наоборот, если* (x_*,y_*,z_*) *является решением задачи* (4), *то найдутся* u_*, w_*, v_* *такие, что* $(x_*,u_*,w_*,y_*,z_*,v_*)$ *– решение задачи* (5).

Нетрудно видеть, что построенная двухуровневая задача (5) относится к классу линейно-линейных задач двухуровневой оптимизации. Поэтому для ее решения можно применить разработанный ранее в нашей группе подход [5], [6], заключающийся в доказательной редукции исследуемой задачи к невыпуклым одноуровневым задачам с билинейной структурой и их последующем решении путем применения теории глобального поиска (ТГП) [7], [8]. Процесс построения алгоритмов на основе ТГП состоит из двух основных этапов: специального локального поиска [7], [8] и процедуры выхода из критических точек, полученных на этапе локального поиска, базирующейся на условиях глобальной оптимальности [7]. Подобный подход позволяет находить решения в двухуровневых задачах с суммарным числом переменных на обоих уровнях до 1000 [6].

Другой задачей, возникающей уже на железнодорожном транспорте, является задача формирования поездов с целью перевозки грузов (Train Set Organization – TSO) [9]. Здесь уже получающаяся в результате моделирования задача двухуровневой оптимизации обладает существенными нелинейностями как в целевой функции, так и в ограничениях, что еще больше усложняет процесс ее численного решения. Тем не менее, имеющийся опыт разработки методов локального и глобального поиска для одного класса нелинейных двухуровневых задач [5], [10], [11] позволяет рассчитывать на разработку эффективных методов решения и в задаче TSO.

Список литературы

1. *Dempe S.* Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.

2. *Brotcorne L., Labbe M., Marcotte P., Savard G.* A Bilevel Model for Toll Optimization on a Multicommodity Transportation Network // Transportation Science. 2001. V. 35, No. 4, P. 345–358.

3. *Орлов А.В.* Глобальный поиск оптимистических решений в двухуровневой задаче оптимального выбора тарифов телекоммуникационным оператором // Известия ИГУ. Серия "Математика". 2013. Т. 6, № 1 (принята к публикации).

4. *Ben-Ayed O., Blair C.E., Boyce D.E., LeBlanc L.J.* Construction of a real-world bilevel linear programming model of the highway network design problem // Annals of Operations Research. 1992. V. 34, No. 1-4. P. 219–254.

5. *Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V.* On computational search for optimistic solutions in bilevel problems // Journal of Global Optimization. 2010. V. 48, No. 1. P. 159–172.

6. *Груздева Т.В., Петрова Е.Г.* Численное решение линейной двухуровневой задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 10. С. 1715–1726.

7. *Стрекаловский А.С.* Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.

8. *Стрекаловский А.С., Орлов А.В.* Биматричные игры и билинейное программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

9. *Gao Y., Lu J., Zhang G., Gao S.* A Bilevel Model for Railway Train Set Organizing Optimization // Proceedings of the International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE 2007) (October 15-16, 2007, Chengdu, China). Atlantis Press, 2007, doi:10.2991/iske.2007.239.

10. *Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В.* Локальный поиск в квадратично-линейной задаче двухуровневого программирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 75–88.

11. *Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В.* Численное решение одного класса задач двухуровневого программирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 201–212.

Системный подход к созданию программных комплексов для решения задач глобальной оптимизации*

М.А. Посыпкин, И.Х. Сигал

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

Работа посвящена разработке и реализации программного комплекса для решения задач оптимизации на однопроцессорных и многопроцессорных ЭВМ. Целью разработки программного комплекса является создание универсальной расширяемой программной инфраструктуры, обладающей следующими свойствами:

- гибкая поддержка широкого спектра вариантов метода ветвей и границ и гибридных подходов;
- высокая производительность на задачах оптимизации большой размерности;
- модульность и расширяемость, позволяющая минимизировать усилия разработчика при добавлении новой функциональности;
- переносимость на уровне исходного кода между различными последовательными и параллельными платформами.

Для достижения поставленных целей предлагается подход, основанный *на разделении вычислительной, коммуникационной и управляющей функциональности* в программе, предназначенной для решения задачи оптимизации методом ветвей и границ. Такой подход позволяет независимым образом реализовывать и отлаживать соответствующие компоненты, а также, облегчать процесс расширения программного комплекса за счет повторного использования ранее разработанных компонент.

Можно выделить следующие основные элементы метода ветвей и границ: выбор множества для ветвления, выбор способа ветвления, выбор правила отсева (исключения из рассмотрения) подзадачи, выбор алгоритма формирования приближенных решений.

Выбор параметров оказывает существенное влияние на производительность метода ветвей и границ. Под *стратегией решения задачи оптимизации* будем понимать способ управления перечисленными параметрами. В работе [1] было предложено понятие *стратегии решения задачи* как способа управления перечисленными параметрами в процессе решения задачи с учетом ресурсов ЭВМ.

Процесс решения оптимизационной задачи комбинированным методом ветвей и границ можно представить как взаимодействие модуля, реализующего стратегию решения, и вычислительного модуля, выполняющего шаги метода.

Для наглядного и строгого описания логики управления процессом решения в диссертационной работе было предложено использовать расширенный формализм конечных автоматов с двумя лентами. Автомат выполняет переходы между состояниями, реагируя на события, приходящие от вычислительного модуля и генерирует управляющие воздействия (команды), которые воспринимаются и выполняются вычислительным модулем. На рис. 1 приведен пример автомата, описывающего стратегию управления методом ветвей и границ, динамически изменяющий способ выбора множества для ветвления.

В случае реализации для многопроцессорных ЭВМ к действиям, выполняемым в последовательном случае, добавляются обмены данными между процессами параллельного приложения. К событиям, подающимся на вход автомата, добавляются события, связанные с получением процессом рекорда, подзадач или некоторой управляющей информации. Множество выдаваемых автоматом команд расширяется командами посылки перечисленных данных. Таким образом, описывается процесс управления не только решением задачи, но и балансировкой загрузки многопроцессорной системы. Каждый процесс параллельной программы управляется отдельным конечным автоматом. При составлении формального описания, как правило, описывается несколько различных типов автоматов, например сервер и клиент.

Предложенный подход был реализован в рамках программного комплекса BNB-Solver[2], который представляет собой расширяемую библиотеку классов Си++. Основная идея организации программного комплекса состоит в выделении универсальных компонентов, которые могут быть использованы с различными вариантами метода ветвей и границ. Практически любая программа, реализующая метод ветвей и границ имеет типовую схему, состоящую из четырех взаимодействующих модулей. *Интегрирующий модуль* обеспечивает взаимодействие *управляющего модуля*, реализующего стратегию решения задачи с *вычислительным модулем*, выполняющим шаги метода ветвей и границ, и *коммуникационного модуля*, ответственного за обмен данными с другим процессом. В последовательном варианте коммуникационный модуль не требуется, так как нет взаимодействия процессов.

Каждый из модулей имеет фиксированный документированный интерфейс. В библиотеке имеются различные реализации этих модулей. Приложение, решающее задачу методом ветвей и границ,

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 11-07-00360-а.

получается с помощью объединения нужных реализаций. Такой подход позволяет сократить усилия, необходимые для реализации новой задачи или нового модуля управления, за счет повторного использование ранее реализованных компонентов.

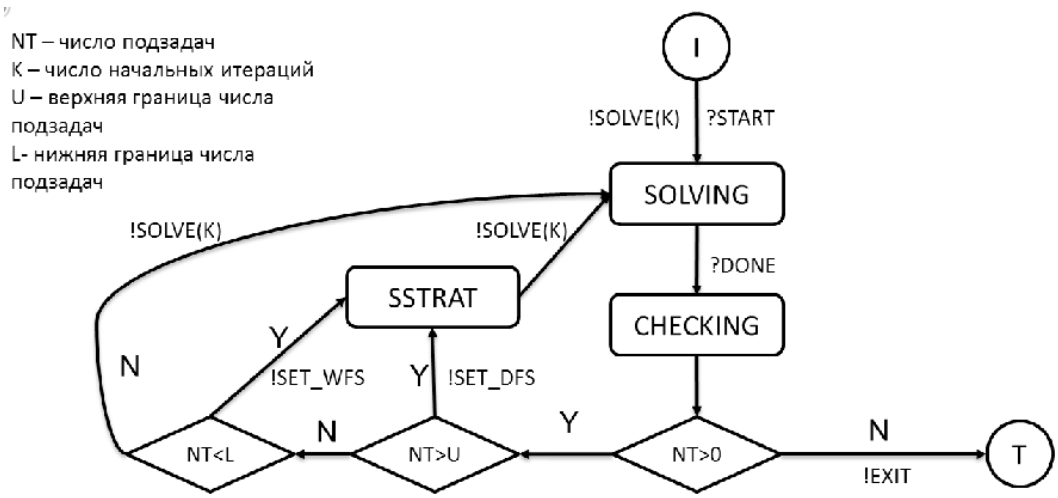


Рис. 1. Пример автомата, описывающего стратегию управления процессом оптимизации

Список литературы

4. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. пособ. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

5. Y. Evtushenko, M. Posypkin, I. Sigal, A framework for parallel large-scale global optimization // Computer Science - Research and Development 23(3), pp. 211-215, 2009.

Оптимальное планирование для моделей двухстадийных стохастических производственных систем

М.Х. Прилуцкий

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается проблема оптимального планирования для моделей производственных систем, функционирующих в условиях неопределенности. Дается постановка оптимизационной задачи планирования, предлагается эффективный алгоритм ее решения. В рамках построенной математической модели исследуются и решаются задачи оптимального планирования процессом переработки газового конденсата, процессом изготовления больших интегральных схем и процессом производства стали в мартеновских печах.

Будем рассматривать производственные системы, функционирующие по следующей схеме. Под воздействием технологических режимов производятся полуфабрикаты, из которых изготавливаются продукты производства. Специфика производственных систем состоит в том, что применение технологического режима не определяет продукт, который будет изготовлен, а задает вероятности получения того или иного полуфабриката. Каждому полуфабрикату соответствует набор продуктов, любой из которых (но только один) может быть изготовлен. Предполагаются известными как затраты на использование технологических режимов, так и доходы от выпуска продуктов. Задачи, рассматриваемые для подобных систем, будем называть *двухстадийными*, принимая за первую стадию процесс изготовления полуфабрикатов, а за вторую – переработку полуфабрикатов в продукты производства. Задача оптимального планирования для рассматриваемых производственных систем заключается в следующем. Предполагается, что искомый план состоит из обязательных продуктов и им сопутствующих. Если по обязательным продуктам известны их количества, подлежащие выполнению в планируемом периоде, то при определении сопутствующих продуктов необходимо стремиться к тому, чтобы вероятность выполнения плана была достаточно велика. При этом нужно учитывать производственные затраты, определяемые выбранными технологическими режимами, и доходы от выпуска включенных в план производства продуктов. Требуется найти план с максимальным удельным доходом, вероятность выполнения которого достаточно велика.

Пусть $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ и $k=\overline{1,s}$ - соответственно номера технологических режимов, полуфабрикатов и продуктов производства. Применение i-го технологического режима определяет вероятности p_{ij} изготовления j-тых полуфабрикатов, $p_{ij}\ge 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$, $i=\overline{1,m}$. Каждому полуфабрикату j соответствует множество $K(j)$ продуктов, любой из которых может быть изготовлен из j-го полуфабриката, $K(j)\in\{1,2,...,s\}$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим через N - количество продуктов, которые будут выпущены в планируемом периоде, c_i - затраты на применение i-го технологического режима, g_k - доход от изготовления k-того продукта, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$. Пусть $N\vec{x}$, $N\vec{y}$ и $N\vec{z}$ соответственно m, n и s-мерные наборы, такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$, $\sum_{j=1}^{n} y_i=1$, $\sum_{k=1}^{s} z_i=1$, где x_i - доля i-ых технологических режимов, которые будут применены в планируемом периоде, y_j - доля j-ых полуфабрикатов, которые будут изготовлены в планируемом периоде, z_k - доля k-тых продуктов, запланированных к выпуску в планируемом периоде, $x_i\ge 0, y_j\ge 0, z_k\ge 0,\ i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$. Обозначим через $N\vec{v}$ - s-мерный вектор такой, что $\sum_{k=1}^{s} v_k\le 1$, где v_k - доля k-тых обязательных продуктов, которые должны быть включены в план, $v_k\ge 0$, $k=\overline{1,s}$.

После преобразований, основанных на теореме Д.Гейла о допустимости, исключающих из рассмотрения переменные $\vec{y}$, задача оптимального планирования ставится как задача определения таких наборов $\vec{x}$ и $\vec{z}$, для которых

$$F(\vec{x},\vec{z})=\max\{(\sum_{k=1}^{s} g_k z_k)(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i)^{-1}\ \Big|\sum_{k=1}^{s} z_k=1,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1,$$

$$\mathrm{z_k}\ge \nu_{\mathrm{k}}\ ,\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{s}},\ x_i\ge 0,\ \lim_{N\to\infty} P(N\vec{z},N\vec{x})=1\},$$

где $p(N\vec{z}\,|N\vec{x})=\frac{1}{\gamma}\int\limits_{M(\vec{z},\vec{x},N)}\exp(-\frac{1}{2}q(\lambda_1',\lambda_2',...,\lambda_{n-1}')d\lambda_1'd\lambda_2'...d\lambda_{n-1}'$ - вероятность изготовления продуктов из набора $N\vec{z}$ с использованием технологических режимов из набора $N\vec{x}$.

Область интегрирования $M(\vec{z},\vec{x},N)$, являясь выпуклым многогранным множеством в $(n-1)$-мерном евклидовом пространстве, задается системой линейных ограничений относительно переменных $\vec{x}$ и $\vec{z}$, что позволило предложить для решения поставленной задачи эффективную схему, основанную на последовательном решении задач линейного программирования.

Идентификация моделей радикально-цепного окисления параллельными методами условной глобальной оптимизации*

В.В. Рябов[1], М.В. Тихонова[2]

[1]ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;
[2]БашГУ, Уфа, Россия

Данная работа продолжает разработку методик идентификации параметров математических моделей сложных химических реакций. В качестве примера используются реакции радикально-цепного окисления органических соединений в присутствии ингибитора, некоторые варианты которых описаны в [1].

Задача идентификации

Математическая модель химической реакции описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (одно уравнение соответствует одной стадии – элементарной реакции; сложная реакция состоит из множества стадий, протекающих одновременно в одном объёме), в которых

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-07-00324), гранта НШ-1960.2012.9 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.B37.21.0393).

присутствуют неизвестные кинетические константы (скорости протекания стадий) – это параметры, которые необходимо идентифицировать. При проведении химического эксперимента многие параметры невозможно измерить в силу технологических ограничений. Однако выходные данные химического эксперимента (вектор $x^{эксп}$) можно использовать для косвенного вычисления недостающих параметров из задачи минизации отклонения модельных данных (вектор $x^{расч}(y)$) от экспериментальных.

$$\varphi(y) = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{H}\frac{\left|x_{kil}^{расч} - x_{kil}^{эксп}\right|}{x_{kil}^{эксп}} \to \min, \qquad (1)$$

$$y = \left(\ln k_{(j)}, \ln k_{(-j)}\right), \qquad (2)$$

где y – вектор идентифицируемых параметров; $k_{(j)}$, $k_{(-j)}$ - приведенные константы скоростей прямой и обратной j-й элементарной стадии, *1/ч*, соответственно; $j,-j$ – индекс прямой и обратной элементарной стадии; H - количество наблюдаемых веществ; n - количество точек эксперимента (временных отсечек для измерения); P - количество экспериментов.

В работе рассматривается две реакции: окисление н-декана в присутствии классического ингибитора - параоксидифениламина (ПОДА), а также с добавлением изопропилового спирта. Во втором случае механизм реакции усложняется четырьмя дополнительными стадиями [1]. Остальные стадии описываются одинаково, что позволяет объединить две задачи идентификации в одну задачу условной оптимизации.

$$\begin{aligned} &F(y) \to \min, \\ &g(y) - g_{\min} - \varepsilon \le 0, \\ &-g_H(y) \le 0, \\ &g_T(y) - 0.1 \le 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

где $F(y)$ описывает расширенный механизм, $g(y)$ – исходный. $g_H(y)$ учитывает соотношение концентраций ингибиторов, $g_T(y)$ ограничивает длину индукционного периода [5]. Размерность задачи – $N=10$.

Параллельный индексный метод глобальной оптимизации

Алгоритмы условной липшицевой оптимизации работают со следующей постановкой задачи:

$$\begin{aligned} &\varphi^* = \min\{\varphi(y) : y \in D\} \\ &g_j(y) \le 0,\ 1 \le j \le M, \\ &D = \{y \in R^N : a_i \le y_i \le b_i,\ 1 \le i \le N\}, \end{aligned} \qquad (8)$$

где целевая функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица с соответствующей константой L: $|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \le L\|y_1 - y_2\|$, $y_1, y_2 \in D$.

Функции $g_j(y)$ также удовлетворяют условию Липшица с константами L_j.

Используя кривые типа развертки Пеано $y(x)$, однозначно отображающие отрезок [0,1] на N-мерный гиперкуб P

$$P = \{y \in R^N : -2^{-1} \le y_i \le 2^{-1},\ 1 \le i \le N\} = \{y(x) : 0 \le x \le 1\},$$

исходная задача редуцируется к одномерной:

$$\varphi(y_D(x^*)) = \min\{\varphi(y_D(x)) : x \in [0,1]\}.$$

Для решения редуцированной одномерной задачи используется эффективный алгоритм с индексной схемой учёта ограничений [2] и рядом модификаций [3, 4].

В работе [5] получены данные об ускорении параллельного индексного метода на данной задаче при одинаковом числе испытаний (500 тысяч).

Рис. 1 показывает, что эффективность распараллеливания при использовании до 90 ядер плавно падает до ~30%. Данная работа направлена, в том числе и на анализ потенциала для увеличения эффективности реализации параллельного индексного метода.

Вычисления выполнены на новом кластере ННГУ, содержащем 16 вычислительных узлов. Характеристики каждого узла:

- два 4-ядерных процессора Intel Xeon L5630 2,13 ГГц (8 ядер на узел, всего – 128);
- 24 Гб оперативной памяти DDR3 (3 Гб на ядро).

Кластер работает под управлением операционной системы Windows Server 2008. Теоретическая пиковая производительность кластера (без учёта GPU) составляет 2176 Гигафлоп.

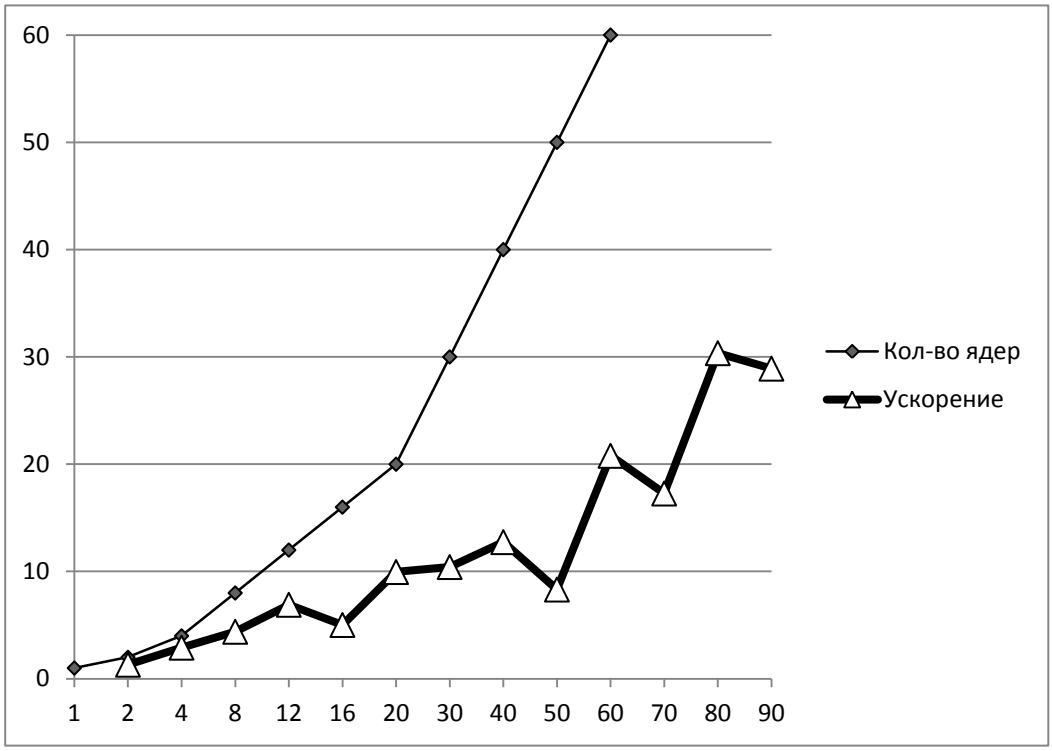


Рис. 1. Ускорение параллельного индексного метода на данной задаче

Выделение областей неопределенности кинетических параметров

Одной из существенных проблем при решении обратных кинетических задач является невозможность отыскания точных значений констант скоростей стадий, например из-за неравномерности температур в эксперименте. Поскольку в реальных условиях значения температур соответствуют некоторым осредненным температурам, даже экспериментальные данные описываются с большой погрешностью на уровне 6-7 %, а значения искомых констант скоростей стадий определяются с еще большей погрешностью. В связи с этим можно переформулировать цель оптимизации, попытавшись формально определить не единственные значения кинетических констант, а область (например, интервалы) их изменения, которая обеспечивает требуемое качество описания измерений с заданной химиками-экспериментаторами точностью ε:

$$\phi(y) \le \varepsilon .$$

При решении задачи глобальной оптимизации строится покрытие области поиска, сгущающееся в окрестности всех глобальных оптимумов (на практике, и в окрестности некоторых локальных оптимумов, близких по значению функционала к глобальным). В работе предлагается использовать точки этого покрытия, лежащие в пределах $\phi(y) \le \varepsilon$, для поиска границ области неопределенности (например, в виде гипермногогранника или вписанного в него гиперпараллелепипеда).

Такие области неопределенности, вообще говоря, могут быть неодносвязными, что может объясняться возможностью существования локальных минимумов функционала, близких по значению к глобальному. Для выделения областей связности в работе используется алгоритм кластеризации k-MEANS.

Список литературы

1. *Гарифуллина Г.Г., Герчиков А.Я., Осипова С.А.* Регенерация ингибитора добавками многоатомных спиртов в окисляющемся декане. // Башкирский химический журнал. 1997. Т.4. №3.С. 64-65.

2. *Strongin R.G., Sergeyev Ya.D.* Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

3. *Баркалов К.А.* Ускорение сходимости в задачах условной глобальной оптимизации. Нижний Новгород: изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2005.

4. *Баркалов К.А., Рябов В.В., Сидоров С.В.* Параллельные вычисления в задачах многоэкстремальной оптимизации. // Вестник ННГУ, 2009. №6. С. 171-177.

5. *Рябов В.В., Тихонова М.В.* Идентификация моделей радикально-цепного окисления органических соединений в присутствии ингибиторов параллельными методами условной глобальной оптимизации // Труды конференции “Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ)”, Челябинск, 2013. Принято к публикации.

К решению одного обобщения биматричной игры

А.С. Стрекаловский

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
Иркутск, Россия

Рассматривается игра трех игроков x, y, z, где $x \in S^m$, $y \in S^n$, $z \in S^l$, $e_k = (1,\ldots,1)^\top \in R^k$

$$S_k = \{x = (x_1,\ldots,x_k)^\top \in R_+^k \mid \langle e_k, x\rangle = 1\}, \quad k = m,n,l; \tag{1}$$

с критериями эффективности

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= \langle x, A_1 y\rangle + \langle x, A_2 z\rangle, \\ F_2(x,y,z) &= \langle y, B_1 x\rangle + \langle y, B_2 z\rangle, \\ F_3(x,y,x) &= \langle z, C_1 x\rangle + \langle z, C_2 y\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где A_p, B_p, C_p, $p = 1,2$ – матрицы соответствующих размерностей, являющаяся обобщением биматричной игры (см. [1-3]).

Определение 1. Ситуация $(x^*, y^*, z^*) \in S_m \times S_n \times S_l$ называется равновесием по Нэшу, если

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y^*, z^*) &\le F_1(x^*, y^*, z^*) \quad \forall x \in S_m, \\ F_2(x^*, y, z^*) &\le F_2(x^*, y^*, z^*) \quad \forall y \in S_n, \\ F_3(x^*, y^*, z) &\le F_3(x^*, y^*, z^*) \quad \forall z \in S_l. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Равновесные выигрыши игроков обозначим $v_k^* = v_k(x^*, y^*, z^*) \overset{\Delta}{=} F_k(x^*, y^*, z^*)$, $k = 1,2,3$, множество всех ситуаций равновесия – $NE \overset{\Delta}{=} NE(A,B,C)$, а вектор $Ay = \left((Ay)_1,\ldots,(Ay)_m\right)$. Тогда можно показать, что для того, чтобы $(x^*, y^*, z^*) \in NE$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left.\begin{aligned} (A_1 y^*)_i + (A_2 z^*)_i &\le v_1^* \quad \forall i = 1,\ldots,m, \\ (B_1 x^*)_j + (B_2 z^*)_j &\le v_2^* \quad \forall j = 1,\ldots,n, \\ (C_1 x^*)_p + (C_2 y^*)_p &\le v_3^* \quad \forall p = 1,\ldots,l. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

К тому же будут выполнены и условия линейной комплементарности:

$$\left.\begin{aligned} x_i^*\left[(A_1 y^*)_i + (A_2 z^*)_i - v_1^*\right] &= 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m, \\ y_j^*\left[(B_1 x^*)_j + (B_2 z^*)_j - v_2^*\right] &= 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n, \\ z_p^*\left[(C_1 x^*)_p + (C_2 y^*)_p - v_3^*\right] &= 0 \quad \forall p = 1,\ldots,l, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а также следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} v_1^* &= \max_{1\le i\le m}\left[(A_1 y^*)_i + (A_2 z^*)_i\right], \\ v_2^* &= \max_{1\le j\le n}\left[(B_1 x^*)_j + (B_2 z^*)_j\right], \\ v_3^* &= \max_{1\le p\le l}\left[(C_1 x^*)_p + (C_2 y^*)_p\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Также как для биматричных игр [3], нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 1. *Для того, чтобы* $(x^*, y^*, z^*) \in NE$ *необходимо и достаточно существования чисел* $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*$, *при которых справедливы соотношения*

$$\left.\begin{aligned} A_1 y^* + A_2 z^* &\le \alpha_* e_m, \\ B_1 x^* + B_2 z^* &\le \beta_* e_n, \\ C_1 x^* + C_2 y^* &\le \gamma_* e_l; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} F(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) \overset{\Delta}{=} \langle x^*, (A_1 + B_1^\top) y^*\rangle + \langle x^*, (A_2 + C_1^\top) z^*\rangle + \langle y^*, (B_2 + C_2^\top) z^*\rangle - \\ -\alpha_* - \beta_* - \gamma_* = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассматривая задачу максимизации функции $F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ на множестве, определенном неравенствами (7) (без звездочек), можно доказать, что любое глобальное решение $(x^*,y^*,z^*,\alpha_*,\beta_*,\gamma_*)$ этой задачи оптимизации непременно будет равновесием по Нэшу в задаче (2)-(3).

Поэтому рассматривается именно эта задача оптимизации (P), для которой в частности разработан метод локального поиска, учитывающий специфику постановки. Кроме того, при общих предположениях знаконеопределенности матриц $(A_1+B_1^\top),(A_2+C_1^\top),(B_2+C_2^\top)$ доказаны необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности набора $(x^*,y^*,z^*,\alpha_*,\beta_*,\gamma_*)$ в задаче (P), на основе которых разработан метод глобального поиска, доставляющий одновременно и равновесие по Нэшу (x^*,y^*,z^*) в рассматриваемой игре.

На специально сконструированном поле тестовых примеров разработанный метод глобального поиска продемонстрировал свою вычислительную эффективность.

Список литературы

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов и кибернетиков. М.: Наука, 1985.

2. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.

3. *Стрекаловский А.С., Орлов А.В.* Биматричные игры и билинейное программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Планирование вычислений в многопроцессорных системах реального времени с дополнительным ресурсом

М.Г. Фуругян

ВЦ РАН, Москва, Россия

Рассматривается задача составления допустимого расписания с прерываниями в многопроцессорной системе реального времени в случае, когда заданы директивные интервалы, процессоры могут иметь произвольные производительности, а длительности выполнения работ линейно зависят от количества выделенного им дополнительного ресурса. Разработан алгоритм, основанный на сведении исходной задачи к задаче линейного программирования в случае одинаковых директивных интервалов и к задаче о потоке минимальной стоимости для произвольных директивных интервалов.

Постановка задачи. Рассматривается вычислительная система, состоящая из m процессоров t типов. Производительность процессоров j-го типа равна s_j, а их число составляет m_j (j = 1, 2, …, t; $\sum_j^t m_j = m$). Имеется множество заданий (работ) $N=\{1, 2, ..., n\}$. Предполагается, что в каждый момент времени каждый процессор может выполнять не более одного задания, а каждое задание выполняется не более чем одним процессором. При выполнении заданий допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. Предполагается, что прерывания и переключения не сопряжены с временными затратами. Для задания $i \in N$ установлен директивный интервал $(b_i, f_i]$ (т.е. работа i может выполняться только в этом интервале). Помимо процессоров в системе имеется дополнительный ресурс не возобновляемого типа. Суммарное количество этого ресурса составляет R. Если заданию i выделено r_i единиц дополнительного ресурса, то объем работы процессоров по выполнению задания i составляет $Q_i = d_i - a_i r_i$, где

$$r_i \in [0, \overline{r}_i], \ i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in N} r_i \le R, \tag{2}$$

a_i, d_i, $\overline{r}_i$ – заданные величины, $a_i > 0$, $d_i > 0$, $0 \le \overline{r}_i < d_i / a_i$. Таким образом, $Q_i \in [d_i - a_i\overline{r}_i, d_i]$, причем $d_i - a_i\overline{r}_i > 0$. За время τ процессор j-го типа выполняет объем работы $s_j\tau$. Если задание i, имеющее объем Q_i, выполняется процессором j-го типа в течение интервала времени τ_j (j = 1, 2, …, t), то $Q_i = \sum_{j=1}^t s_j\tau_j$.

Требуется найти такое распределение ресурсов $(r_1^0, r_2^0, ..., r_n^0)$, при котором существует допустимое расписание (т.е. такое расписание, при котором каждая работа полностью выполняется в своем директивном интервале), или установить, что такого распределения ресурсов не существует. При этом распределение ресурсов $(r_1^0, r_2^0, ..., r_n^0)$ должно удовлетворять ограничениям (1), (2). Кроме того,

требуется найти минимальную величину R дополнительного ресурса, при которой допустимое расписание существует.

Разработан алгоритм, основанный на сведении исходной задачи к задаче линейного программирования в случае одинаковых директивных интервалов и к задаче о потоке минимальной стоимости для произвольных директивных интервалов.

Вычислительная сложность алгоритма – $O(n^4 \sum_{i \in N} d_i)$. Число прерываний в построенном расписании составляет $O(n^2)$.

Нелинейные модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода

А.С. Хохлов, Ю.М. Цодиков

ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, ЗАО «Хоневелл» г. Москва

В докладе излагаются результаты исследования нелинейных моделей оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода (НПЗ) и вычислительный опыт решения этих задач.

Модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода (НПЗ) являются нелинейными моделями большой размерности. Модель завода включает технологическую схему, подмодели всех технологических процессов завода, качество сырья, требования к качеству товарных продуктов, цены на сырье, продукты, энергоносители и вспомогательные материалы. Модели разрабатывались с помощью системы RPMS [1-2]. Эта система автоматизирует построение общей модели завода на основе подмоделей отдельных процессов, проверяет данные, обращается к пакету программ оптимизации XPRESS и после решения формирует отчеты о результатах расчета. Система применяется для текущего планирования работы НПЗ и для планирования реконструкции и развития заводов.

Модель оптимального планирования НПЗ формулируется как модель многопериодной оптимизации на p периодов:

$$F = \sum_{t=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} c_j^t x_{jr}^t, \quad F \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}^t x_{jr}^t = b_i^t, \quad t = 1, \dots p, \; x_{jr}^t \geq 0 \tag{2}$$

$$\underline{d}_j \leq \sum_{t=1}^{p} x_{jr}^t \leq \overline{d}_j, \; j \in J^0 \tag{3}$$

Здесь F - прибыль, x_{jr}^t - переменные задачи, потоки продукта в период t; r – шаг вычислительного процесса (рекурсии), состоящий в решении задачи (1-3), a_{ijr}^t - коэффициенты матрицы $A^{tr}\{a_{ijr}^t\}$; c_j^t - цены, b_i^t, $\underline{d}_j$, $\overline{d}_j$ - коэффициенты ограничений; J^0 - множество общих ограничений на весь горизонт планирования T. Длительность τ_t периодов t может быть различной, весь горизонт планирования фиксирован $T = \sum_{t=1}^{p} \tau_t$. Модель линейного программирования (ЛП) (1-3) может быть многопериодной, но также может включать только один период (p=1).

После решения задачи ЛП (1-3) коэффициенты матрицы a_{ijr}^t в некоторых ограничениях пересчитываются на каждом шаге r вычислительного процесса в соответствии со следующими зависимостями:

$$a_{ijr}^t = f_{ij}(q_{ijr-1}^t), \quad q_{ijr}^t = \sum_{t=1}^{p} \alpha_{ij} x_{jr-1}^t, \tag{4}$$

где величины q_{ijr-1}^t по физическому смыслу это, как правило, показатели качества сырья установок или показатели качества компонентов смесей, которые определяются на шаге r-1 аддитивно от переменных x_{jr-1}^t; $f_{ij}(q_{ijr-1}^t)$ - линейные зависимости или заданные элементарные функции. При первом решении задачи (1-3) r=1 начальные значения показателей q_{ij0}^t заданы.

Задача (1-4) по существу является нелинейной со значительным числом переменных, которые входят в нелинейные зависимости. Форма записи задачи (1-4) предполагает решение методом последовательного моделирования и оптимизации, который рассматривается как вариант последовательного ЛП [3]. В результате моделирования (4) определяются параметры линеаризованной модели (1-3), а затем решается задача линейного программирования (ЛП) (1-3). После получения решения проверяется точность моделирования путем сравнения значений параметров: q^t_{ijr-1} и q^t_{ijr}, а также коэффициентов матрицы a^t_{ijr}, которые пересчитываются. Этот процесс рекурсивно повторяется до получения заданной точности моделирования и линеаризации. Для каждой модели задаются разные параметры требуемой точности для величин q^t_{ijr} и a^t_{ijr} различной физической природы. В решаемых задачах таких параметров точности расчета было около 30.

Программы системы RPMS [1] включают средства контроля рекурсий и корректировки параметров процесса вычислений так, чтобы обеспечить сходимость модели, а также анализировать результаты при неудовлетворительной скорости сходимости.

Задача ЛП (1-3) решается с помощью пакета программ XPRESS. В программе XPRESS задача ЛП большой размерности решается методом барьерных функций (Primal-dual barrier algorithm with a predictor-corrector). Если этим методом не удается получить решение с требуемой точностью, то тогда найденное решение может быть стартовой точкой для решения симплекс методом.

В таблице ниже для примера приведены размеры решаемых задач ЛП: число столбцов и строк матрицы ЛП, количество ненулевых элементов матрицы и метод решения.

Сложность задач состоит в том, что пересчет коэффициентов матрицы производится для многих строк матрицы, примерно для 10-15% от общего числа строк матрицы, указанных в таблице. Решение задачи ЛП начинается барьерным методом, но для некоторых задач в процессе решения происходил переход с барьерного метода на симплекс метод в связи с тем, что барьерный метод после значительного числа итераций не находил решения с заданной точностью. В таблице для таких задач указано два метода решения: метод барьерных функций (МБМ) и симплекс метод. Как видно из таблицы такая ситуация возникает часто. В этих случаях симплекс метод всегда позволял получить решение за небольшое число итераций или найти, что задача является несовместной. Таким образом, в этом случае барьерный метод находил близкое решение. Этот важный факт, касающийся барьерного метода, был также установлен и при применении пакета программ ЛП фирмы ИБМ, использовавшегося ранее.

№	Столбцы матрицы	Строки	Ненулевые элементы	Метод решения
1	4822	3283	26623	МБФ, Симплекс
2	4801	3259	27361	МБФ
3	4228	2790	26801	МБФ
4	4197	2790	25672	МБФ
5	4443	2902	27851	МБФ
6	4322	2911	26954	МБФ
7	4210	2806	24549	МБФ, Симплекс
8	4111	2763	24654	МБФ, Симплекс
9	4127	2773	24919	МБФ, Симплекс
10	4106	2761	24661	МБФ, Симплекс

Нужно отметить, что в публикациях по исследованию метода барьерных функций приводятся только такие примеры, когда решение барьерным методом получено (см., напр., обзор [4] 2012 г.). Обычно в этих публикациях не рассматриваются задачи, когда этим методом не получается решение, а получена только стартовая точка для другого метода решения, что также достаточно эффективно для сложных задач.

Список литературы

1. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). //WWW.honeywell.com

2. *Мостовой Н.В., Хохлов А.С.* Компьютерное моделирование и оптимизационное инвестиционное планирование в нефтехимии и нефтепереработке.//Химия и технология топлив и масел. 2007. №2. с. 3 – 6.

3. Optimization in industry. Mathematical Programming and Modeling Techniques in Practice. Ed. Ciriani T.A., Leachman R.C. J. Wiley&Sons, 1994.

4. *J. Gondzio.* Interior point method 25 years later. //European Journal of Operational Research. 2012. v. 218, p.583-601.

Проблемы построения расписаний при проектировании информационно-управляющих систем на базе существующих

П.Е. Шестов, В.А. Костенко

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

При проектировании информационно управляющих систем реального времени (ИУС РВ), которые построены на базе существующих систем, необходимо решать задачу построения согласованных расписаний выполнения прикладных задач и передачи сообщений. ИУС РВ рассматривается как система, состоящая из набора вычислительных модулей и подсистем (взятых из существующих систем), подключенных к единой среде передачи данных. Исходными данными задачи являются набор прикладных задач (работ) и набор сообщений, посредством передачи и приема которых работы взаимодействуют друг с другом и подсистемами. Прерывание выполнения работ и сообщений недопустимо. Каждая подсистема может рассматриваться как множество работ (в дальнейшем работы-подсистемы), выполняющихся на отдельном вычислительном модуле, на который недопустимо назначение работ из исходно заданного набора. Работы-подсистемы не подлежат планированию, но участвуют в приеме и отправке сообщений наряду с другими работами.

Исходный набор работ и сообщений задаётся ориентированным ациклическим графом (возможно несвязным) с двумя типами вершин. Первый тип вершин соответствует работам, второй – сообщениям. Дугами графа задаётся частичный порядок на множествах работ и сообщений. Если у вершины-работы среди предшественников есть вершины-работы, то все они вместе с исходной вершиной-работой должны быть запланированы на один и тот же вычислительный модуль, а обмен данными происходит через внутреннюю память этого модуля. Для каждой работы задан директивный интервал, в рамках которого она должна быть выполнена, и набор вычислительных модулей, на которых работа может быть выполнена. Для каждого сообщения задан директивный интервал, в рамках которого оно должно быть передано. Для каждой работы задана функция, определяющая длительность выполнения заданной работы на заданном вычислительном модуле. Функция, позволяющая определить длительность передачи сообщений, зависит от привязки работ к вычислительным модулям и может быть вычислена только после распределения инцидентных ей работ на вычислительные модули.

Расписание выполнения работ представляет собой множество троек вида <работа *i*, номер вычислительного модуля на котором выполняется работа *i*, время старта работы *i*>. Расписание называется корректным, если выполнены следующие ограничения:

1) каждая работа включена не более чем в одну тройку;
2) требование реального времени (каждая работа выполняется в рамках своего директивного интервала);
3) на одном и том же вычислительном модуле в каждый момент времени может выполняться только одна работа;
4) каждая работа должна быть запланирована только на допустимый для неё вычислительный модуль.

Расписание передачи сообщений представляет собой множество пар вида <сообщение, время старта>. Расписание называется корректным, если выполнены следующие ограничения:

1) общие ограничения для одноприборных систем без прерывания работ:
   а) каждое сообщение включено не более чем в одну пару;
   б) требование реального времени (каждое сообщение должно быть передано в рамках своего директивного срока);
   в) в каждый момент времени может передаваться только одно сообщение;
2) ограничения корректности, обусловленные технологическими требованиями к обмену данными, например для шины с централизованным управлением [1] должны выполняться следующие ограничения:
   а) суммарная длительность передачи сообщений в цепочке не должна превышать заданного значения (цепочка – последовательность сообщений передающихся друг за другом без пауз);
   б) число сообщений в цепочке не должно превышать заданного значения;
   в) между цепочками сообщений должен быть свободный промежуток времени, длительность которого должна быть не меньше заданного значения.

Совместное расписание выполнения работ и передачи сообщений представляет собой пару расписаний вычислений и обменов. Совместное расписание называется корректным, если выполнены следующие ограничения:

1) ограничения корректности для расписания выполнения работ;
2) ограничения корректности для расписания передачи сообщений;
3) в расписании передачи сообщений запланированы все сообщения, передающие данные, необходимые для выполнения запланированных работ;
4) в расписании выполнения работ запланированы все работы, формирующие данные, передающиеся в запланированных в расписании обменов сообщениях;
5) в расписании выполнения работ все работы, передающие данные запланированным работам через внутреннюю память вычислительных модулей, запланированы на тот же вычислительный модуль, что и получатели данных;

Задача построения совместного расписания выполнения работ и передачи сообщений заключается в построении расписания, которое содержит максимально возможное число работ и сообщений и удовлетворяет условиям корректности.

Для решения сформулированной задачи было предложено два алгоритма.

Алгоритм на основе жадных стратегий [2]. Данный алгоритм на каждой итерации своего основного цикла выбирает для планирования работу или сообщение согласно заранее заданному жадному критерию. Выбранная работа или сообщение размещается в расписание на самое ранее возможное время с учетом всех ограничений корректности. Для работы так же определяется вычислительный модуль, который допускает такое размещение. Если выбранная работа или сообщение не могут быть размещены в расписание без нарушения ограничений корректности, то из дальнейшего рассмотрения алгоритмом исключается весь подграф графа работ и сообщений с началом в выбранной работе или сообщении. Основной проблемой алгоритма является тот факт, что длительность передачи сообщения становится известна только после назначения на вычислительные модули передающей и всех принимающих работ. В связи с этим длительность передачи каждого сообщения изначально считается равной максимально возможной. При работе алгоритма, если оценка длительности передачи сообщения уменьшается, то осуществляется возврат процесса планирования на тот момент, когда было запланировано данное сообщение с его последующим перепланированием с учетом изменившейся длительности.

Алгоритм на основе метода ветвей и границ [3]. В качестве вершин дерева решений данного алгоритма выступают неполные привязки работ к вычислительным модулям. Под привязкой понимается набор пар <работа, вычислительный модуль>. При порождении новой вершины выбирается работа, которой нет в привязке родительской вершины, и назначается на один из вычислительных модулей. Каждая вершина оценивается сверху и снизу максимальным и минимальным соответственно числом работ и сообщений, которые могут быть в расписании, соответствующему данной привязке. Для оценки используется алгоритм так же основанный на методе ветвей и границ, у которого в качестве вершин дерева решений выступают упорядоченные списки работ (по одному для каждого вычислительного модуля) и сообщений. Эти списки строятся независимо, при порождении новой вершины в конец каждого списка добавляется по элементу. На основе этих списков строится корректное совместное расписание, по которому вычисляются верхние и нижние оценки.

Экспериментальное исследование алгоритмов проводилось на случайно сгенерированных данных, основывающихся на данных реальной ИУС РВ. В расписаниях, построенных при помощи алгоритма на основе жадный стратегий, отсутствовало в среднем порядка 5% всех работ и сообщений, тогда как алгоритм на основе метода ветвей и границ планировал все работы и сообщения. Однако быстродействие жадного алгоритма гораздо выше. На современных персональных компьютерах жадный алгоритм работает несколько секунд, а алгоритм на основе метода ветвей и границ работает несколько часов.

Список литературы

1. ГОСТ Р 52070–2003. Интерфейс магистральный последовательный системы электронных модулей. – Введ. 01.01.2004 – М.: Изд-во стандартов, 2001. – 23 с.

2. *Костенко В.А., Шестов П.Е*. Жадный алгоритм совместного планирования вычислений и обменов в системах реального времени// Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 5. С. 35-49.

3. *Шестов П.Е.* Алгоритм на основе метода ветвей и границ совместного планирования вычислений и обменов в системах реального времени // Труды шестой международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (PACO’2012). М.: ИПУ РАН, 2012. Т.3, С. 317-329.

Многокритериальная оптимизация

1. *V.D. Noghin* Axiomatic approach to reduce the Pareto set: computational aspects 58
2. *Г.К. Каменев* Метод многокритериального исследования, основанный на аппроксимации множеств достижимости нелинейных динамических систем 60
3. *А.П. Карпенко, Д.Т. Мухлисуллина* Интерактивный метод решения задачи многокритериальной оптимизации, основанный на оценках функции предпочтений ЛПР 61
4. *А.В. Лотов, К.Г. Фатеев* Многокритериальный анализ эффективности воздействия лекарства на раковую опухоль с использованием многозначной идентификации модели роста опухоли 63
5. *В.В. Михайлов, А.А. Томилов, В.М. Умывакин* Агрегированное оценивание в задачах морфологического синтеза природно-технических систем 64
6. *Я.И. Рабинович* Метод «идеальной» точки для оценки качества решений в задачах векторной оптимизации 66
7. *А.И. Рябиков* Применение метода прокси-критериев в задаче многокритериальной оптимизации с конечнозначными критериями 67
8. *Г.Г. Федин* О расстоянии между интервальными порядками, порожденными двумя типами распределения объектов на оси 68
9. *И.Ф. Шахнов* Метод медиан в задаче упорядочения интервальных трехточечно заданных объектов 70

Axiomatic approach to reduce the Pareto set: computational aspects*

V.D. Noghin

St.-Petersburg State University, Russia

Introduction. In 1983, the author presented a report at the conference [1]. At this point begins the approach based on the use of certain numerical information about preferences for decision-maker (DM) and designed to remove from the feasible alternatives such elements that cannot be selected. Such information consists of a finite set of incomparable (with respect to the Pareto relation ≥) pairs of vectors for which the DM can definitely say which is preferable to another. Subsequently, such information was called as a set of "quanta" of information about the preference relation, and the approach named as the axiomatic approach, since it is based on the accepting of several axioms of "reasonable" behavior of DM. In [2] the author introduced the so-called Pareto set reduction problem and developed the axiomatic approach to solve this problem in bicriteria case. In [3] consideration was continued in the general case with any finite number of criteria. A significant development was presented in [4], where for the broad class of multicriteria problems (when a vector function and a feasible set are arbitrary), it was established that any set of selected alternatives is a subset of "new" Pareto set, which can be constructed using the "new" vector criterion, whose the number of components is not less than the dimension of the "old" criterion. Thus, for arbitrary set of selected alternatives (vectors) a certain upper estimate in the form of "new" Pareto set was constructed. This estimate depends on type of "quantum" of information as well as initial vector criterion and a set of feasible alternatives. In extreme cases, the estimate may consist of one element (the final choice is uniquely defined) or coincide with the initial Pareto set (i.e. it does not lead to a narrowing). Subsequently, the author and his students obtained a lot of results of such type according to different sets of "quanta" of information. Place considered axiomatic approach, among others, designed to narrow the Pareto set, as well as its relationship with them has been analyzed in [5]. At the moment, we can say that, in principle, the axiomatic approach got its final completion, since recently [6-7] there were proposed two algorithms to construct "new" vector criterion using any finite consistent set of “quanta” information.

Next, we consider the brief history and evolution of the axiomatic approach in terms of the computational aspects related to the construction of the "new" vector criterion in order to get an upper estimate for arbitrary set of selected alternatives.

1. Multicriteria choice problem and axioms of "reasonable" choice. Subsequent consideration related to the problem of multicriteria choice problem, including arbitrary numerical vector criterion f and an arbitrary nonempty set of feasible alternatives (variants) X. The set of selected alternatives is denoted by $C(X)$. This set is the solution to multicriteria choice problem. In addition, dealing with this problem we suppose that there is a

* This report is supported by the Russian Fund for Basic Research (project #11-07-00449).

binary preference relation $\succ$, which is an extension of the DM's preference relation on all the criterion space R^m. This binary relation is unknown but satisfies the following four axioms.

Axiom 1. *For any pair of vectors* $y', y'' \in Y$ *satisfying* $y' \succ y''$ *the relation* $y'' \notin C(Y)$ *holds.*

Axiom 2. *The relation* $\succ$ *is transitive.*

Axiom 3. *Each criterion* f_i *is compatible with the preference relation* $\succ$, *i.e. for each i and for any two vectors* $y', y'' \in R^m$, *such that*

$$y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, ..., y'_m),\ y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m),\ y'_i > y''_i,$$

the relation $y' \succ y''$ *is true.*

Axiom 4. *Preference relation* $\succ$ *is invariant under positive linear transformation.*

Suppose that we have a pair of Pareto optimal vectors y', y''. Each of them is not dominated by other with respect to binary relation $\geq$, i.e. there exist two non-empty subsets $A, B \subset I = \{1, 2, ..., m\}$ such that

$$y'_i > y''_i, \quad y'_i - y''_i = w_i > 0 \quad \forall i \in A,$$

$$y''_j > y'_j, \quad y''_j - y'_j = w_j > 0 \quad \forall j \in B,\ y'_s = y''_s, \qquad \forall s \in I \setminus (A \cup B).$$

In this case, if $y' \succ y''$ is true, then we have *a "quantum" of information* about the preference relation $\succ$ with parameters w_i, w_j for all $i \in A,\ j \in B$. Then according to Axiom 1 we may conclude that the element y'' cannot be selected one. Another words we may delete y'' from the Pareto set. This narrowing of the Pareto set, as a rule, does not facilitate a choice process. However, due to Axioms 1−4, reducing of the Pareto set will be more significant.

Namely (see [8]), *for any set of selected alternatives C(X) the inclusions*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X) \tag{1}$$

hold, where the "new" vector criterion g is formed from the functions f_i *for all* $i \in I \setminus B$ *and* $g_{ij} = w_j f_i + w_i f_j$ *for all* $i \in A,\ j \in B$.

Thus, to take into account the "quantum" of information, we have to recalculate the initial vector criterion f using above formulas, and then to construct a new Pareto set $P_g(X)$. This set will be an upper estimate for unknown $C(X)$. In [8] a number of similar statements were presented for some simple "quanta" of mutually dependent information.

In [9] it is considered a situation, when there is a set of two "quanta" of information with the sets A_1, B_1 and A_2, B_2, and also $A_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ и $A_2 \cap B_1 \neq \varnothing$. There were established necessary and sufficient conditions under which this information is consistent, and was found the vector criterion *g* such that the inclusions (1) are true. An applied multicriteria problem, in which a similar situation occurs, is presented in [10].

In [11-12] it is studied a case of so-called closed set of "quanta" information about the preference relation. The simplest example of this kind of information is the situation where there is a set of three "quanta" with $A_1 = B_3 = \{i\}, B_1 = A_2 = \{j\}, B_2 = A_3 = \{k\}$. In [13-14], similar problems were considered for a set of special a point-set as well as a set-point type information.

It is impossible to get formulas for in order to take into account an arbitrary finite set of consistent "quanta" of information. However, as was proved in [6-7], it is possible to develop algorithms to evaluate a new criterion *g*.

References

1. *Noghin V.D.* Estimates for the set of optimal solutions when the preference relation is invariant under positive linear transformations//Abstracts of the IV Vsesouzn. Seminar on Operations Research and Systems Analysis, "Decision making under uncertainty and multicriteriality" Moscow−Batumi: 1983. P. 37 (in Russian).

2. *Noghin V.D.* et al. Foundation of optimization theory. Moscow: Higher School. 1986 (in Russian).

3. *Noghin V.D.* Estimation of the set of nondominated solutions//Numerical Functional Analysis and Applications. 1991. V. 12. № 5 & 6, P. 507−515.

4. *Noghin V.D.* Relative importance of criteria: a quantitative approach //J. Multi-Criteria Decision Analysis. 1997. № 6, P. 355−363.

5. *Noghin V.D.* The Pareto set reducing problem: approaches to solution//Artificial Intelligence and Decision Making. 2008. Number 1, P. 98−112 (in Russian).

6. *Noghin V.D., Baskov O.V.* Pareto set reduction based on arbitrary finite collection of numerical information on the preference relation//Doklady Mathematics. 2011. Vol. 83. No. 3, P. 1–3. 7.

7. *Noghin V.D.* Pareto set narrowing algorithm based on arbitrary finite set of "quanta" of numerical information//Artificial intelligence and decision making. 2013. № 1 (will appear).

8. *Noghin V.D.* Decision making in multicriteria environment: a quantitative approach (2nd edition, revised and expanded). Fizmatlit. 2005 (in Russian).

9. *Klimova O.N., Noghin V.D.* Using mutually dependent information on the relative importance of the criteria in the decision-making process//Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2006. T. 46, № 7, P. 2179−2191 (in Russian).

10. *Klimova, O.N.* The problem of choosing the optimal chemical composition of shipbuilding steel// Theory and Control Systems. 2007. № 6, P. 66−70 (in Russian).

11. *Zakharov A.O.* The Pareto set narrowing based on closed mutually dependent information//Artificial Intelligence and Decision Making. 2011. Number 1, P. 95−109 (in Russian).

12. *Zakharov A.O.* The narrowing of the Pareto set based on closed fuzzy information regarding the preferences of the decision maker//Vestnik of St. Petersburg State University. Ser. 10: Applied Mathematics. Informatics. Management processes. 2012. No. 3, P. 33−47 (in Russian).

13. *Noghin V.D.* Reducing the Pareto set based on point-set information//Artificial Intelligence and Decision Making. 2009. № 5, P. 1−16 (in Russian).

14. *Noghin V.D.* Pareto set reducing based on set-point information//Artificial Intelligence and Decision Making, 2010. № 2, P. 54−63 (in Russian).

Метод многокритериального исследования, основанный на аппроксимации множеств достижимости нелинейных динамических систем*

Г.К. Каменев

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына, Москва, Россия

В многокритериальном исследовании, критерии которого связаны с терминальными фазовыми состояниями динамической системы, может быть использована предварительная аппроксимация множества достижимости рассматриваемой системы [1, 2].

В докладе рассматривается итерационный метод глубоких ям [3], в котором для аппроксимации множеств достижимости, неявно заданных нелинейной динамической системой, используется объединение большого числа шаров. Метод основан на проведении вычислительных экспериментов с динамической системой и позволяет строить аппроксимируемое множество достижимости с заданными отклонением, надежностью и полнотой. Аппроксимированное множество, имеющее такое явное описание, может быть использовано как в непосредственном интерактивном визуальном исследовании, так и в различных процедурах принятия решений, требующих расчета критериев, заданных на множестве достижимости.

Реализация метода глубоких ям [3, 4] требует большого числа вычислительных экспериментов с исследуемой динамической системой и чувствительна к размерности пространства критериев и пространства управлений. В настоящее время число фазовых переменных не должно превышать пяти-семи, а произведение числа управлений на число шагов не должно превышать нескольких сотен. В случае если рассматривается задача большей размерности, может быть использована аппроксимация проекций или частей исследуемого множества, а также подходы, аналогичные методу крупных шагов [5, 6], в котором аппроксимируются промежуточные множества достижимости.

Список литературы

1. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. и Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

2. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

3. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.

4. *Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л.* Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Математическое моделирование. 1992. №3. С. 105-118.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (12-01-00916, 13-01-00235), ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18 и ПФИ ОМН РАН № 3.

5. *Лотов А.В., Бушенков, В.А., Каменев Г.К.* Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999.

6. *Брусникина Н.Б., Лотов А.В.* Аппроксимация с гарантированной точностью множеств достижимости для линейной динамической системы, подверженной импульсным воздействиям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. №9. С. 1512-1521.

Интерактивный метод решения задачи многокритериальной оптимизации, основанный на оценках функции предпочтений ЛПР

А.П. Карпенко, Д.Т. Мухлисуллина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Постановка задачи. Рассматривается следующая задача многокритериальной оптимизации (МКО-задача)

$$\min \Phi(X) = \Phi(X^*),\ X \in D_X, \qquad (1)$$

где X – вектор варьируемых параметров; D_X – ограниченное и замкнутое множество допустимых значений этого вектора; $\Phi(X)$ – векторный критерий оптимальности $\Phi(X) = (\phi_1(X),\ldots,\phi_m(X))$. Лицо, принимающее решение (ЛПР), стремится найти такой вектор X^* – искомое решение МКО-задачи, который минимизирует на множестве D_X каждый из частных критериев оптимальности. Полагаем, что частные критерии оптимальности тем или иным способом нормализованы, так что $\phi_i(X) \in [0;1]$ для любых $X \in D_X, i \in [1:m]$.

Методы решения МКО-задачи чрезвычайно разнообразны. Существует несколько способов классификации этих методов [1, 2]. Используем классификацию, основанную на содержании и форме использования дополнительной информации о предпочтениях ЛПР [2]. В соответствии с этой классификацией выделяют следующие классы методов решения МКО-задачи: методы, не учитывающие предпочтений ЛПР; априорные методы; апостериорные методы; интерактивные методы.

Предлагаемый интерактивный метод решения МКО-задачи (1), названный авторами метод *PREF*, основан на том предположении, что на множестве D_X существует функция предпочтений ЛПР $\psi(X)$, которая отображает это множество во множество действительных значений, т.е. $\psi : X \to R^1$. Говоря более строго, МКО-система преобразует введенные ЛПР значения лингвистической переменной $\psi(X)$ в действительные числа, принадлежащие диапазону [1..9]. В результате МКО-задача сводится к задаче поиска вектора *X*, который максимизирует функцию предпочтений ЛПР:

$$\max \psi(X) = \psi(X^*) = \psi^*,\ X \in D_X.$$

Обозначим $\varphi(X,\Lambda)$ операцию свертки частных критериев оптимальности, где $\Lambda \in D_\Lambda \subset R^m$ - вектор весовых множителей; $D_\Lambda = \{\lambda_i \mid \lambda_i \ge 0, \sum_i \lambda_i = 1,\ i \in [1:m]\}$ - множество допустимых значений этого вектора. Для любого $\Lambda \in D_\Lambda$ метод скалярной свертки сводит решение задачи (1) к решению однокритериальной задачи глобальной условной оптимизации (ОКО-задачи)

$$\min \varphi(X,\Lambda) = \varphi(X^*,\Lambda),\ X \in D_X. \qquad (2)$$

Условие (2) позволяет полагать [3], что функция предпочтений ЛПР определена не на множестве D_X, а на множестве D_Λ, т.е. $\psi : \Lambda \to R^1$. В результате МКО-задача сводится к задаче поиска вектора $\Lambda^* \in D_\Lambda$ такого, что

$$\max \psi(\Lambda) = \psi(\Lambda^*) = \psi^*,\ \Lambda \in D_\Lambda. \qquad (3)$$

Метод решения задачи. Общая схема метода *PREF* является итерационной и состоит из перечисленных ниже следующих основных этапов [3].

Этап «разгона» метода. МКО-система некоторым образом (например, случайно) последовательно генерирует *k* векторов $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_k$ и для каждого из этих векторов Λ_i выполняет следующие действия.

1) Решает соответствующую ОКО-задачу (2).

2) Предъявляет ЛПР найденное решение X_i^*, а также соответствующие значения всех частных критериев оптимальности $\Phi(X_i^*)$.

3) ЛПР оценивает эти данные и вводит в МКО-систему соответствующее значение своей функции предпочтений $\psi(\Lambda_i)$.

Первый этап. На основе всех имеющихся в МКО-системе значений векторов $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_k$ и соответствующих оценок функции предпочтений МКО-система выполняет следующие действия.

1) Строит функцию, аппроксимирующую функцию $\psi(\Lambda)$ в окрестности точек $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_k$.

2) Отыскивает максимум функции – решает ОКО-задачу вида (3).

3) С найденным вектором решает ОКО-задачу вида (2) – находит вектор параметров и соответствующие значения частных критериев оптимальности, а затем предъявляет их ЛПР. ЛПР оценивает указанные данные и вводит в систему соответствующее значение своей функции предпочтений $\psi(\Lambda_1^*)$.

Второй этап. На основе всех имеющихся в МКО-системе значений векторов $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_k,\Lambda_1^*$ и соответствующих оценок функции предпочтений МКО-система строит функцию , аппроксимирующую функцию $\psi(\Lambda)$ в окрестности точек $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_k,\Lambda_1^*$ и т.д. по схеме первого этапа до тех пор, пока ЛПР не примет решение о прекращении вычислений.

Алгоритм и программная реализация. В работе рассматривается нейросетевая аппроксимации функции предпочтений ЛПР с использованием персептронной нейронной сети (*MLP*-сеть) с тремя, пятью, семью и девятью нейронами в скрытом слое, а также на основе радиально базисной нейронной сети (*RBF*-сеть). Кроме того, в работе рассмотрена нейро-нечеткая аппроксимация функции предпочтений ЛПР [3].

Построение нечёткой модели функции предпочтений происходит в два этапа.

На *первом этапе* осуществляется формирование базы знаний и грубая настройка модели, которая включает в себя назначение весов δ нечетких правил вида

ЕСЛИ <значения входных переменных> ТО <значение выходной переменной δ >

и значений параметров, определяющих форму функций принадлежности: a - полуширина функций принадлежности входных переменных, b - полуширина функций принадлежности выходных переменных.

Суть *второго этапа* состоит в тонкой настройке модели, которая заключается в подборе таких весов нечетких правил ЕСЛИ-ТО и таких значений параметров функций принадлежности, которые минимизируют различие между экспериментальным и желаемым поведением объекта:

$$\mathrm{E}(a,b,\delta)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\psi(\Lambda_i)-\overline{\psi}(\Lambda_i))^2}\to\min_{a,b,\delta}.$$

Здесь N – номер итерации. В работе используется схема нечёткого логического вывода Мамдани, которая состоит из пяти основных этапов [4]:

Фазификация $\to$ Агрегирование $\to$ Активизация $\to$ Аккумуляция $\to$ Дефаззификация.

Исследование эффективности метода. Используем общепринятую методику исследования эффективности методов многокритериальной оптимизации. Один из подходов данной методики предусматривает применение так называемой истинной функции предпочтений $V(\Phi)$, имитирующей ответы ЛПР. Экстремум данной функции называют истинным решением Φ^*. В рамках данного подхода были использованы следующие индикаторы эффективности (I_{eff}): $\tilde{\varepsilon}_a$ – медианное значение погрешности найденного решения $\varepsilon_a=\left\|\tilde{\Phi}-\Phi^*\right\|$, где $\tilde{\Phi}$ – наилучшее решение, найденное с помощью рассматриваемого метода; число итераций диалога с ЛПР; число вычислений векторного критерия оптимальности Φ.

Исследование выполнено для двух двумерных двухкритериальных и одной трехмерной трехкритериальной тестовых МКО-задач:

- двухкритериальная задача 1, имеющая выпуклый фронт Парето;
- двухкритериальная задача 2 (невыпуклый многосвязный фронт Парето);
- трехкритериальная задача 3 (выпуклый фронт Парето).

Результаты исследования показывают, что медианная ошибка аппроксимации $\tilde{\varepsilon}_a$ во всех случаях не превышала 0,7. Минимальная погрешность аппроксимации при решении всех тестовых задач достигается при использовании нейро-нечеткой системы. По сравнению с нейросетевой и нейро-нечеткой аппроксимацией функции предпочтений ЛПР, решение задачи с помощью нечеткой логики требует большего времени вычислений и большего числа итераций диалога с ЛПР.

Решение прикладных задач. С помощью метода *PREF* решена двумерная двухкритериальная задача оптимизации механической подсистемы двигателя внутреннего сгорания (ДВС) в программном

комплексе *PRADIS*, предназначенном для анализа динамики систем различной физической природы. Данная работа выполнена при сотрудничестве с ООО «Ладуга». В качестве ЛПР выступал эксперт в области ДВС. ЛПР потребовалось выполнить семь итераций для поиска наиболее удовлетворительного для него решения [3].

Совместно с кафедрой МТ2 «Инструментальная техника и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана решена трехмерная трехкритериальная задача оптимизации геометрии щелевого фильтра для очистки жидкостей. Для этой цели была разработана модель фильтра в системе трехмерного моделирования *SolidWorks*. Руководителем работы выступал д.т.н., проф. Зубкова Н.Н. Задача была решена за девять итераций.

Исполнительный механизм пресса. Совместно с кафедрой МТ6 «Технологии обработки металлов давлением» МГТУ им. Н.Э. Баумана решена двухкритериальная задача оптимизации исполнительного механизма пресса. Работа выполнена под руководством д.т.н., проф. Складчикова Е.Н. Задача была решена за пять итераций.

Все эксперты, выступавшие в роли ЛПР, высоко оценили удобство метода *PREF*.

Список литературы

1. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.

2. *Branke J., Deb K., Miettinen K., Slowinski R. (Eds.)* Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2008. 470 p.

3.*Карпенко А.П., Мухлисуллина Д.Т., Овчинников В.А.* Нейросетевая аппроксимация функции предпочтений лица, принимающего решения, в задаче многокритериальной оптимизации // Информационные технологии, 2010, №10. С. 2-9.

4. *Карпенко А.П., Моор Д.А., Мухлисуллина Д.Т.* Многокритериальная оптимизация на основе нейро-нечеткой аппроксимации функции предпочтений лица, принимающего решения. //Наука и образование: электронное научное издание. Инженерное образование, 2010, №6 (http://technomag.edu.ru/doc/143964.html).

Многокритериальный анализ эффективности воздействия лекарства на раковую опухоль с использованием многозначной идентификации модели роста опухоли*

А.В. Лотов, К.Г. Фатеев

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Доклад посвящен применению методики поддержки поиска эффективных решений с помощью визуализации границы Парето [1, 2] на основе анализа математической модели, при идентификации параметров которой была выявлена неустойчивость решения этой задачи. Методика применяется в задаче поиска эффективной стратегии терапии раковой опухоли. В связи с неустойчивостью решения задачи идентификация параметров модели используется метод множеств идентификации – человеко-машинный метод идентификации параметров, основанный на аппроксимации и визуальном изучении графика функции ошибок идентификации [3, 4]. Поддержка поиска эффективных решений в случае неопределенности в значениях параметров модели основана на модификации метода разумных целей, предназначенной для поддержки выбора в случае большого конечного числа вариантов, последствия которых известны неточно [5, 6].

В докладе описывается применение метода множеств идентификации для идентификации параметров модели воздействия лекарства на опухоль. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная проблема идентификации этой модели связана с параметрами роста опухоли. Показывается неустойчивость решения задачи точной идентификации параметров по экспериментальным данным и выделяется область в пространстве параметров, которая не противоречит этим данным. Остальные параметры были взяты непосредственно из эксперимента.

Анализ публикаций (а также использование независимых экспертных оценок) позволили сформулировать список реально применяемых стратегий лечения. Многокритериальный анализ

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (13-01-00235 и 13-01-00779), ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18 и ПФИ ОМН РАН № 3.

совокупности таких стратегий лечения с использованием традиционного метода разумных целей позволил выделить среди них предпочтительные эффективные стратегии. Изучение совокупности выделенных эффективных стратегий с использованием моделей с неточно заданными параметрами позволило сформулировать рекомендации по лечению.

Список литературы

1. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. и Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

2. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

3. *Каменев Г.К.* Визуальная идентификация параметров моделей в условиях неоднозначности решения // Математическое моделирование. 2010. Т.22, № 9. С. 116-128.

4. *Каменев Г.К.* Метод исследования неопределенности, возникающей при идентификации параметров модели. М.: Изд. ВЦ РАН, 2010, 46 с.

5. *Lotov A.V.* Visualization-base selection-aimed data mining with fuzzy data // Int. J. on Information Technology & Decision Making. 2006. V. 5, no. 4. P. 611-621.

6. *Лотов А.В., Холмов А.В.* Метод разумных целей в задаче многокритериального стохастического выбора // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010. № 3. С. 79-88.

Агрегированное оценивание в задачах морфологического синтеза природно-технических систем

В.В. Михайлов, А.А. Томилов, В.М. Умывакин

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина» (г. Воронеж)

В работах [1-2] предложена процедура структурной оптимизации природно-технических систем (ПТС), основанная на комплексировании методов морфологического анализа [3], ЛП-поиска [4] и экспертных оценок [5]. Морфологический синтез ПТС – это этап выбора наилучших вариантов структуры на основе агрегированных оценок соответствия требованиям к их качеству, т.е. условиям задачи структурной многокритериальной оптимизации.

Для многокритериальной структурной оптимизации ПТС необходимо рассматривать ситуацию, когда критерии качества измеряются в нечисловых шкалах, т.е. в ранговой или балльной шкалах. В этом случае для комплексного оценивания качества вариантов структуры ПТС можно использовать известные процедуры агрегирования – логические матрицы сверток [6] на основе построения иерархической структуры критериев качества типа дерева свойств. Особенностью такой иерархии является агрегирование в каждом узле дерева только двух критериев, измеренных в ранговой или балльной шкалах. В этих же шкалах формируется и комплексная оценка, а результат свертки критериев представляется в виде таблицы (матрицы). Недостатком данного подхода является достаточно большая нагрузка на экспертов при формировании матриц сверток.

В работах [2,7] предлагается использовать другой подход. Пусть множество возможных вариантов структуры проектируемой ПТС представлено в виде морфологической таблицы (МТ). При этом анализируемые варианты полностью характеризуются набором номинальных параметров $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_L)$, каждый из которых может иметь лишь конечное число значений. Описание возможного варианта структуры ПТС на формальном языке производится фиксированием для каждого номинального параметра одного значения. Составляя возможные комбинации (сочетания) значений всех номинальных параметров, получим морфологическое множество возможных вариантов структуры ПТС.

Обозначим через Y_j^{ik} - частную оценку в рангах или баллах i-го значения k-го параметра x_k по j-му частному критерию качества y_j, $i=1,2,...,N_k$; $k=1,2,...,L$; $j=1,2,...,M$. Причем, для всех j, k и i оценка Y_j^{ik} принимает целые значения из интервала [0,К]. В общем случае критерии y_j являются комплексными по отношению к одноименной совокупности частных критериев качества y_j^k.

Вид свертки дискретных оценок качества Y_j^o может быть получен из некоторых общих соображений. Пусть Y_1^o и Y_2^o - частные оценки качества ПТС, принимающие целые значения из интервала [0,К], а $F(Y_1^o,Y_2^o)$ - комплексная дискретная оценка качества, зависящая от частных. Потребуем выполнения следующих дополнительных условий, выделяющих класс допустимых сверток:

1) областью значений $F(Y_1^o,Y_2^o)$ также являются целые числа в интервале [0,К];

2) если частные оценки Y_1^o и Y_2^o принимают максимальные (минимальные) значения, то и агрегированная оценка F принимает соответственно максимальное (минимальное) значение, т.е. $F(0,0)=0$, $F(К,К)=К$;

3) частные оценки Y_1^o и Y_2^o являются равноценными. Это значит, что интегральная оценка не должна меняться при перестановке Y_1^o и Y_2^o, т.е. выполняется свойство коммутативности: $F(Y_1^o,Y_2^o)=F(Y_2^o,Y_1^o)$;

4) частные оценки Y_1^o и Y_2^o, подлежащие свертке, соответствуют критериям, которые находятся на одном иерархическом уровне. Это свойство находит отражение в ассоциативности оценки: $F(F(Y_1^o,Y_2^o),Y_3^o)=F(Y_1^o,F(Y_2^o,Y_3^o))$;

5) если F - произвольная монотонная функция, ставящая в соответствие каждому числу из [0,К] некоторое число из этого же интервала, тогда из соотношения $Y^o=F(Y_1^o,Y_2^o)$ следует, что $F(Y^o)=F[F(Y_1^o),F(Y_2^o)]$. Это условие учитывает тот факт, что порядковые величины определены с точностью до произвольного монотонно возрастающего преобразования.

Может быть доказана следующая *Теорема* [7]: Существуют только две функции $F(Y_1^o,Y_2^o)$, удовлетворяющие условиям 1)-5):

$min(Y_1^o,Y_2^o)$ и $max(Y_1^o,Y_2^o)$.

Доказательство теоремы основано на представлении агрегированной дискретной оценки $F(Y_1^o,Y_2^o)$ в виде функции (К+1)-значной логики и проведении индукции по множеству возможных значений переменных и функций. Для К=1 существует 16 различных булевых функций, среди которых только две удовлетворяют сформулированным требованиям.

Отметим, что в работе [8] показано, что для критериев, измеренных в порядковой шкале, в качестве средних величин могут быть использованы все члены вариационного ряда (в частности, минимальные и максимальные значения, а также медиана).

Кратко рассмотрим вопрос построения интегральной оценки качества вариантов структуры ПТС как функции дискретных комплексных оценок, принимающих значения из интервала [0,К]. С помощью монотонного нелинейного возрастающего преобразования от этих оценок можно перейти к оценкам D_j, которые являются частными оценками по отношению к интегральной оценке D и удовлетворяют следующим требованиям:

1) $D(D_1,D_2,...,D_M)\in[0,1]$ при $D_1,D_2,...,D_M\in[0,1]$; 2) $D(0,0,...,0)=0$, $D(1,1,...,1)=1$.

Если все частные оценки D_j удовлетворяют условиям коммутативности (равноценности) и ассоциативности (принадлежности одному иерархическому уровню дерева свойств ПТС), тогда интегральная оценка качества вариантов структуры ПТС принимает вид [7]:

$$D=[1-\prod_{j=1}^{M}(1-D_j)].$$

Список литературы

1. *Михайлов В.В., Умывакин В.М., Федорова Я.А.* Структурно-параметрическая оптимизация систем на основе морфологического ЛП-поиска // VI Моск. междунар. конф. по исследованию операций (ORM2010): Москва, 19-23 окт. 2010 г.: Труды. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 383-385.

2. *Михайлов В.В., Томилов А.А., Умывакин В.М. и др.* Морфологический анализ и синтез эколого-экономических решений при проектировании природно-антропогенных систем // Системный анализ проблемы устойчивого развития: тр. Ин-та систем. анализа РАН. М.: ЛЕНАНД, 2010. Т. 54. С. 172-184.

3. *Одрин В.М.* Морфологический синтез систем: морфологические методы поиска / Препринт; Ин-т кибернетики АН УССР.Киев, 1986. 40 с.

4. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.

5. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.

6. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Как управлять проектами. М.: СИНТЕГ-ГЕО,1997.188 с.

7. *Каплинский А.И., Руссман И.Б., Умывакин В.М.* Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1991. 168 с.

8. *Орлов А.И.* Прикладная теория измерений // Прикладной многомерный статистический анализ. М.: Наука, 1978. С.68-138. (Ученые записки по статистике, Т.33).

Метод «идеальной» точки для оценки качества решений в задачах векторной оптимизации

Я.И. Рабинович

ВЦ РАН, Москва, Россия

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ вектор значений частных критериев эффективности $w \in W \subset \mathbb{R}^m$ принимает на множестве достижимых векторных оценок W положительные значения, $W \subset \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid u > 0 \right\}$, где m – число частных критериев.

Рассматривая в качестве приближенного решения задачи векторной оптимизации конечное множество $A \subset W$, аппроксимирующее множество эффективных векторных оценок $W_e \subset W$, приходится сталкиваться с непростой проблемой оценки точности несовпадающих аппроксимаций $A' \neq A''$: аппроксимация A' может оказаться лучшим приближением некоторого подмножества $U \subset W_e$ множества эффективных векторных оценок, а аппроксимация A'' – его дополнения $\overline{U} = W_e \setminus U$. Расстояние по Хаусдорфу $\Delta(A, W_e)$ между аппроксимацией A и множеством эффективных векторных оценок W_e не может служить конструктивной мерой точности (иными словами, качества) аппроксимации, поскольку искомое множество W_e бывает известно лишь в тестовых задачах.

Конструктивный метод оценивания качества аппроксимирующих множеств, не зависящий от способа их генерации, может быть получен с помощью интегральной функции

$$\Psi(A) = \int_{\Lambda} \left[\frac{\max\limits_{w \in A} f_\lambda(w)}{f_\lambda(w^*)} \right] d\Lambda, \quad 0 < \Psi(A) \le V(\Lambda),$$

где

$$f_\lambda(w) = \min_{1 \le k \le m,\, \lambda_k > 0} \lambda_k^{-1} w_k, \quad \lambda \in \Lambda, \quad w \in \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid u > 0 \right\},$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \quad \lambda \ge 0 \right\},$$

$d\Lambda$ – дифференциал $(m-1)$ – мерного объема $V(\Lambda)$ стандартного симплекса $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, векторная оценка $w^* = \sum_{k=1}^{m} \left(\max\limits_{w \in W} w_k \right) e^k$ составлена из значений, «рекордных» на множестве достижимых векторных оценок W. Как правило, эта т. н. «идеальная» точка не является достижимой векторной оценкой, $w^* \notin W$, поскольку в противном случае она совпадает с множеством эффективных векторных оценок, $\left\{ w^* \right\} = W_e$, и задача векторной оптимизации оказывается вырожденной.

Если полагать, что качество произвольной аппроксимации $A \subset W$ тем выше, чем больше соответствующее значение функции $\Psi(A)$, то условие $\Psi(A) \ge \Psi(B)$ порождает на множестве всевозможных непустых аппроксимаций (подмножеств множества достижимых векторных оценок W) бинарное отношение нестрогого предпочтения, являющееся полным квазипорядком. Показано, что в согласии таким бинарным отношением аппроксимация, от которой множество эффективных векторных оценок отклоняется незначительно, оказываются предпочтительнее любых других.

Для вычисления значений функции Ψ методами численного интегрирования решена задача разбиения области интегрирования (стандартного симплекса) равномерной сеткой. Для этого единичный куб

$$E = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, 0 \le \lambda \le \sum_{k=1}^{m} e^k \right\}$$

разбивают на p^m кубических ячеек со стороной p^{-1}, что приводит к такому разбиению вложенного в куб стандартного симплекса

$$\Lambda = \bigcup_{q \in Q(p,m)} \Lambda(q),$$

$$Q(p,m) = \left\{ q \in \mathbb{R}^m \left| \sum_{k=1}^{m} e^k \le q, \quad 1 \le \sum_{k=1}^{m} q_k - p \le m-1 \right. \right\},$$

где q – вектор с натуральными компонентами, что барицентры $\lambda(q)$ соседних образовавшихся ячеек симплекса $\Lambda(q)$ находятся на равных расстояниях друг от друга. Объемы ячеек симплекса (не равные друг-другу при $m > 3$, $p > 1$) определены соотношениями

$$V(\Lambda(q)) = p^{1-m} Z_r^m V(\Lambda), \quad q \in Q(p,m),$$

$$V(\Lambda) = \frac{\sqrt{m}}{(m-1)!}, \quad r = \sum_{k=1}^{m} q_k - p, \quad p = 1, 2, \ldots$$

где коэффициенты Z_r^m совпадают с числами Эйлера – коэффициентами $A(m-1, r)$ в многочленах Эйлера (см. [1]).

Теперь при вычислении значения функции $\Psi(A)$ для произвольной конечной аппроксимации $A \subset W$ можно использовать квадратурную формулу

$$\Psi_p(A) = \frac{V(\Lambda)}{p^{m-1}} \sum_{q \in Q(p,m)} \left[\frac{\max\limits_{w \in A} f_{\lambda(q)}(w)}{f_{\lambda(q)}(w^*)} Z_r^m \right], \quad p = 1, 2, \ldots$$

которая при достаточно большом значении параметра p позволяет «различить» по качеству любые две конечные аппроксимации $A, B \in W$, если разность соответствующих точных значений функции отлична от нуля, $\Psi(A) - \Psi(B) \ne 0$. Это позволяет считать введенную интегральную функцию Ψ работоспособным инструментом оценки качества аппроксимирующих множеств.

Список литературы

1. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М: Мир, 1990.

Применение метода прокси-критериев в задаче многокритериальной оптимизации с конечнозначными критериями*

А.И. Рябиков

ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, Москва, Россия

Предлагается метод решения задачи локальной скалярной оптимизации свертки критериев (см. [1], с. 95), принимающих конечное число значений. В качестве конкретной задачи оптимизации с такими критериями рассматривается многокритериальная задача синтеза управления динамической системой с дискретным временем, управление которой является функцией состояния и зависит от набора параметров, а каждый критерий – число нарушений одного из требований, предъявляемых к системе [2]. Множество допустимых значений параметров задает совокупность возможных функций управления. Примером такой задачи синтеза является задача управления каскадом водохранилищ [3].

Метод оптимизации свертки критериев основан на решении модифицированной задачи оптимизации, в которой исходные критерии заменяются на непрерывные прокси-критерии. Каждый из них основан на использовании суммы степенных функций от нарушений ограничений. Обычно в качестве такой функции берется квадратичная функция, но проведенные в исследовании эксперименты показали, что такой подход не в состоянии найти хорошее решение исходной задачи, если оптимальное значение свертки критериев не равно нулю. Дело в том, что при минимизации квадратичной функции ее значение равномерно распределяется по нарушениям, что может привести к увеличению значения исходных критериев. В данной работе изучается вопрос об использовании в качестве прокси-критериев степенных функций различных степеней и экспериментально показывается, что использование степени от 0.5 до 1 позволяет найти достаточно хорошее решение исходной задачи. В рамках экспериментов прокси-критерии сравнивались по скорости сходимости метода сопряженного градиента, используемого при

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00235), ПФИ Президиума РАН П-15 и ПФИ ОМН РАН № 3.

локальной минимизации, и было получено, что с увеличением степени скорость сходимости монотонно убывает.

Список литературы

1. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М.: изд. МАКС Пресс, 197 стр.

2. *Lotov A.V., Riabikov A.I.* Multi-criteria design of control rules for nonlinear dynamic problems by using visualization of the Pareto frontier // Abstracts of the 2nd Int. Conf. Optimization and Applications (Optima-2011), М.: изд. ВЦ РАН, 2011, с. 157-159.

3. *Бубер А.Л., Лотов А.В., Рябиков А.И.* Разработка правил управления ГЭС с использованием визуализации границы Парето, Труды VI Московской межд. конф. по исследованию операций (Москва, 19-23 октября 2010), М: изд. МАКС Пресс, 2010, стр. 178-180.

О расстоянии между интервальными порядками, порожденными двумя типами распределения объектов на оси

Г.Г. Федин

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

Ранжирование объектов является важной задачей в теории принятия решений [1,2]. Данная задача является простой в случае, когда у каждого объекта имеется одна числовая характеристика, однако, даже в случае, если у объектов две числовые характеристики задача становится значительно сложнее.

В данной работе рассматривается случай, когда объекты ранжирования имеют множество параметров однородных по своей природе, причем разные объекты могут иметь разное количество параметров. Приведём пример таких объектов: университеты, в качестве параметров используются результаты ЕГЭ студентов; города, в качестве параметров может быть использован доход жителей, возраст, занятость; фильмы и их оценки зрителями. В этом случае может быть определено выборочное распределение параметра соответствующее каждому объекту [3].

В рамках предложенной в данной работе модели* объектам в соответствие ставится интервал с центром в точке среднего значения выборочного распределения соответствующего данному объекту, длина интервала зависит от дисперсии распределения. В частности, рассматриваются интервалы с длиной равной удвоенной дисперсии. Таким образом, мы получаем возможность определить интервальный порядок [2] на множестве объектов.

Интервальный порядок - это бинарное отношение, удовлетворяющее условиям антирефлексивности и строгой интервальности. Антирефлексивность означает, что оно не включает пары вида $(a_i; a_i)$. Условие строгой интервальности: $\forall a_i, a_j, a_k, a_l \in A$ (*множество вариантов*) $(a_i; a_j)$ *и* $(a_k; a_l) \Rightarrow (a_i; a_l)$ *или* $(a_k; a_j)$. Важным свойством интервального порядка является то, что он может быть представлен в виде интервалов на действительной оси.

В данном случае интервальный порядок на множестве объектов определяется с помощью интервалов на отрезке изменения параметра. Как было сказано ранее, каждому объекту поставлен в соответствие интервал. Тогда говорится, что в бинарном отношении присутствует пара$(a_i; a_j)$ если выполняется неравенство $\mu_i - f(\sigma_i) > \mu_j + f(\sigma_j)$, где $f(\sigma)$ положительная, возрастающая функция от дисперсии, $\mu_i -$ *центр интервала*. В [1] были заложены основы использования интервальных порядков при ранжировании объектов имеющих интервальные оценки.

Введем две модели с объектами, имеющими «идеальные» распределения:

1) Средние значения выборочных распределений расположены на отрезке изменения параметра равномерно, на одинаковом расстоянии друг от друга; дисперсии выборочных распределений одинаковые, то есть, всем объектам соответствуют интервалы одинаковой длины.

2) Рассматривается реальное распределение объектов, но всем распределениям назначается одинаковая дисперсия.

Подразумевается, что дисперсия распределений в этих двух «идеальных» случаях меньше, чем дисперсия выборочных распределений в реальной ситуации.

Представленные «идеальные» ситуации могут быть использованы для анализа реальных ситуаций. В частности, может быть найдено расстояние от интервального порядка, построенного по реальной

* Модель предложена Ф.Т.Алескеровым, которому автор выражает искреннюю благодарность.

ситуации, до интервального порядка, заданного «идеальным» случаем какого-либо типа. Для нахождения расстояния между порядками используется метрика Хэмминга.

Показано, что в общем случае нельзя априорно определить какой из интервальных порядков, полученных из «идеальных» случаев ближе в смысле расстояния Хемминга к порядку, полученному по реальному распределению объектов. Однако было найдено достаточное условие, при выполнении которого бинарное отношение, полученное при второй «идеальной» ситуации, всегда не дальше от интервального порядка, определенного реальной ситуацией, чем расстояние от него до интервального порядка, полученного при равномерной «идеальной» ситуации. Найденным достаточным условием является «плотное» расположение средних значений выборочных распределений на отрезке изменения значений параметра. Под «плотным» расположением понимается ситуация, когда расстояние между двумя соседними величинами на отрезке меньше, чем длина отрезка, деленная на общее количество объектов.

В работе были подробно проанализированы два частных случая распределения объектов, в частности, были получены формулы, выражающие расстояние Хэмминга от этих частных случаев до «идеальных» ситуаций, определенных выше.

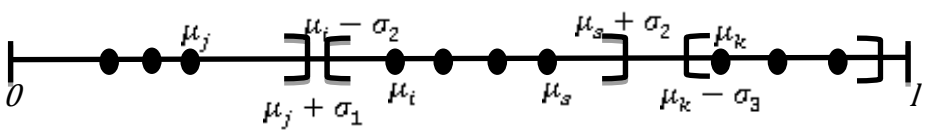
Первый рассмотренный частный тип распределения представляет собой равномерную «идеальную» ситуацию с дисперсией распределений D. Была найдена формула для вычисления расстояния от интервального порядка, построенного по этой ситуации, до равномерного «идеального» случая с таким же количеством объектов и дисперсией σ (предполагается $D > \sigma$):

$$\dim(U_D, U_\sigma) = \sum_{i=\max\left(1,\left[\frac{2N\sigma}{l}\right]\right)}^{\min\left(N,\left[\frac{2ND}{l}\right]\right)} N - i,$$

где U_D, U_σ - интервальные порядки, N - общее количество объектов, а l - длина интервала изменения параметров.

Второй специальный тип является обобщением первого на случай нескольких групп объектов с одинаковой дисперсией внутри групп. Так же накладывается условие, что каждый элемент из группы с большим номером доминирует каждый объект, принадлежащий группе с меньшим номером. Приведем пример такого расположения объектов:

Данный пример может быть проинтерпретирован с помощью университетов и распределения результатов ЕГЭ по ним. Предположим, что имеются три группы университетов: слабые, средние, сильные. Слабые университеты - это первая группа в данном примере. Эти университеты имеют самую



большую дисперсию оценок, так как в слабые университеты зачисляются все желающие с любым результатом по ЕГЭ. Вторая группа - это средние вузы, у них дисперсия оценок меньше; и последняя группа - это сильные вузы, у них дисперсия распределения оценок мала, так как в них могут поступить только абитуриенты с очень высокими баллами.

Ставилась задача найти расстояние между интервальным порядком, заданным вторым специальным типом распределения с k группами объектов, и порядком, полученным из второго «идеального» случая, построенного по этому распределению. Была получена следующая формула для нахождения расстояния Хэмминга:

$$\dim(G, I_2) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=\max\left(1,\left[\frac{2N\sigma_i}{l_i}\right]\right)}^{\min\left(N,\left[\frac{2N\sigma_i}{l_i}\right]\right)} (N - j).$$

Предложенная модель может быть применима к большому спектру объектов, имеющих множество однородных оценок.

Список литературы

1. *Aleskerov F., Bauman E., Vol`ski V.* “Processing of interval expert scores”// Simulation of behavior and intelligence.

2. *Aleskerov F., Monjardet B.* "Utility Maximization, Choice and Preference", Springer Verlag, Berlin, 2002.

3. *Шведов А.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд. М., Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2005.

Метод медиан в задаче упорядочения интервальных трехточечно заданных объектов*

И.Ф. Шахнов

ВЦ РАН, Москва, Россия

Задача упорядочения объектов по степени проявления у них тех или иных интересующих пользователя свойств является одной из важных задач, которые часто приходится решать при математическом моделировании различных аспектов функционирования сложных систем. Типичным примером здесь могут служить задачи многокритериальной оценки различных вариантов развития сложных систем. При решении таких задач необходимо принимать во внимание предполагаемые значения большого числа технико-экономических и других показателей (технический и коммерческий риск, социальная и политическая значимость, объемы необходимых работ, сроки их выполнения, себестоимость, прибыль, конкурентоспособность и др.). Сами оценки вариантов развития по ряду показателей часто известны лишь приблизительно и носят интервальный характер.

Общепринятыми приемами решения задач многокритериальной оценки являются построение множества Парето и использование различного рода сводных показателей (“свертки” показателей). И в том, и в другом случае многокритериальный анализ обычно начинается с упорядочения рассматриваемых вариантов развития по каждому из используемых показателей в отдельности. Получаемые в итоге сводные показатели часто имеют опять-таки интервальный характер, т.е. снова приходится решать проблему упорядочения интервально заданных объектов.

Отметим также, что решение такого важного вопроса, как определение степени коррелированности различных свойств C_1, C_2,..., C_t у рассматриваемых объектов O_1, O_2,..., On, как правило, начинается с упорядочения этих объектов по степени проявления у них каждого из данных свойств в отдельности с последующим установлением коэффициентов корреляции между полученными таким образом упорядочениями (ранжировками) объектов. При этом сами объекты O_1, O_2,..., O_n часто бывают интервально заданными. Это еще раз говорит о том, что проблему упорядочения интервально заданных объектов следует рассматривать как одну из базовых задач прикладного системного анализа.

Рассматриваемый в настоящем докладе подход к решению задачи упорядочения интервальных объектов основан на идее использования стохастических результатов попарных сравнений исследуемых объектов. Новизна предлагаемой постановки задачи заключается в следующем.

Считается, что для каждого из рассматриваемых объектов пользователю известны не только диапазоны возможных значений показателей, по которым сравниваются данные объекты, но и их наиболее правдоподобные значения. Такие объекты в работе называются интервальными *трехточечно заданными объектами*.

Надо сказать, что при планировании развития сложных систем и анализе их возможных вариантов, как правило, приходится иметь дело с *прогнозными данными* относительно основных характеристик планируемых систем и их элементов. Такие данные большей частью выражаются в виде пессимистических, оптимистических и наиболее правдоподобных прогнозных оценок, т.е. представляют собой интервальные *трехточечно заданные объекты*. При этом многие из данных могут быть получены только на основе экспертных оценок, часто опять-таки носящих характер интервальных оценок.

Существенным моментом при выборе вида бинарного отношения предпочтения является конкретизация ситуации, применительно к которой предполагается использовать искомое упорядочение объектов. Так, если рассматриваемые объекты в дальнейшем предназначены для многократного их применения, то вполне оправдано использование предпочтения по матожиданию или по ожидаемой полезности. Действительно, в этом случае при анализе предпочтительности данных объектов естественно исходить из значений того среднего эффекта, который может быть получен при многократном применении каждого из рассматриваемых объектов. Если же, напротив, нахождение искомого упорядочения имеет своей целью получить ранжирование объектов, предназначенных лишь для единичного (одноразового) применения, то целесообразно прибегнуть к предпочтению по вероятности.

Круг объектов, подпадающих под введенное понятие “объекты однократного применения”, весьма широк. Важным примером таких объектов (помимо материально воплощенных технических изделий) являются комплексные мероприятия, выполняемые в режиме так называемых целевых проектов (см. [1]). К таким проектам относятся планируемые мероприятия по ликвидации последствий стихийных бедствий, опытно-конструкторские разработки образцов новой техники, мероприятия, направленные на ликвидацию или ослабление социальных проблем, творческие процессы разработки замыслов и последующие их реализации в виде мероприятий культурного, социального и оздоровительного

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00851).

назначения и т.д. Для целевых проектов характерно, что они выполняются в пределах намеченного интервала времени и заканчиваются либо в результате достижения поставленных целей, либо в результате исчерпания отпущенного лимита времени или ресурсов, выделенных на реализацию проекта. Оценки будущих результатов выполнения таких проектов, естественно, связаны со значительной неопределенностью. В настоящей работе предметом рассмотрения являются объекты именно однократного применения.

Построение искомого упорядочения основных характеристик анализируемых объектов в этих условиях с помощью традиционных методов оказывается весьма затруднительным из-за их высокой трудоемкости и, соответственно, больших затрат вычислительных ресурсов. В связи с этим автором было предложено априори принять, что распределение возможных значений интервальных трехточечно заданных величин может быть описано с помощью треугольных функций плотности вероятности и что соответствующее бинарное отношение предпочтения по вероятности (необходимое для построения искомого упорядочения рассматриваемых величин) может быть аппроксимировано более простым бинарным отношениием.

Исследование задачи ранжирования интервальных трехточечно заданных величин, возможные значения которых характеризуются с помощью треугольных функций плотности вероятности, было начато в [2]. В [2] ранжирование интервально заданных характеристик объектов однократного применения было предложено осуществлять на основе бинарного отношения предпочтения по вероятности. Традиционный подход далее состоял бы в построении матрицы результатов попарных сравнений рассматриваемых интервальных объектов, элементы которой есть вероятности бóльшей предпочтительности одного объекта по сравнению с другим. Следующим шагом было бы решение задачи ранжирования анализируемых объектов на основе информации, содержащейся в этой матрице. Недостатком такого подхода является его очень высокая трудоемкость, связанная, в частности, с нетранзитивностью в общем случае бинарного отношения предпочтения по вероятности.

В противовес такому подходу в [2] было показано, что бинарное отношение предпочтения по вероятности для треугольных функций плотности вероятности может быть аппроксимировано с весьма высокой точностью бинарным отношением предпочтения по медиане. Это означает, что в качестве искомого ранжирования рассматриваемых объектов по вероятности в подавляющем большинстве случаев может быть использовано ранжирование этих объектов по значениям их медиан, что сильно упрощает задачу и в методологическом, и в вычислительном отношении.

Верификация разработанного метода была проведена путем статистического моделирования (методом Монте-Карло). Совпадение результатов моделирования рассматриваемых отношений предпочтения по вероятности и по медиане в среднем имело место не менее, чем в 97 случаях из 100.

В том случае, когда искомое упорядочение предназначено для упорядочивания объектов многократного применения, целесообразно использовать бинарное отношение предпочтения по матожиданию. Искомое упорядочение здесь выражается в виде расположения рассматриваемых интервальных объектов в порядке убывания значений их матожиданий. Отметим также, что значения медиан и матожиданий для треугольных функций распределения легко находятся с помощью элементарных математических выкладок.

Список литературы

1. *Поспелов Г.С., Вен В.Л., Солодов В.М. и др.* Проблемы программно-целевого планирования и управления. М.: Наука, 1981.

2. *И.Ф. Шахнов* Метод медиан в задаче упорядочения интервальных трехточечно заданных объектов. ЖВМ и МФ.2011, Т.51, №8, С. 1390-1399.

Исследование операций в экономике

1. *В.И. Аркин, А.Д. Сластников* Оптимизация механизма государственных гарантий при инвестировании рискованных проектов 72
2. *В.М. Гордуновский, С.Ю. Самохвалов, В.Г. Цедрик* Многокритериальная задача инвестирования в реальный сектор экономики 74
3. *Л.Л. Делицын* Обобщенная модель CGS с зависящей от возраста силой смертности 75
4. *Б.В. Дигас, В.Л. Розенберг* Комплексная оценочная модель MERGE: структура и возможности применения к моделированию социально-экономической динамики 78
5. *В.В. Дикусар, Н.Н. Оленев* Нерегулярные точки в задаче о внешнем долге 79
6. *А.А. Жукова, И.Г. Поспелов* Анализ модели несовершенного рынка и результаты ее идентификации 82
7. *М.А. Макарова, Н.Н. Оленев* К модели инвестиционной политики фирм с учетом обучения персонала 83
8. *В.Д. Матвеенко* Слабые звенья, «мизаллокация» и динамика агломераций 86
9. *Е.Ю. Можжерина* К исследованию человеческого капитала и его устаревания 87
10. *Н.К. Обросова, А.А. Шананин* О функционировании производства в условиях нестабильного спроса 88
11. *И.Г. Поспелов, С.А. Радионов* Модель многоотраслевой монополистической конкуренции 90
12. *А.Г. Соломаха* Задача оптимального управления рекламными затратами в нечеткой постановке 91
13. *С.В. Чуканов* Разрушение простых асимптотик в моделях оптимальной экономической динамики (численные исследования) 93

Оптимизация механизма государственных гарантий при инвестировании рискованных проектов*

В.И. Аркин, А.Д. Сластников

ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

Имеется проект, который после своего финансирования может приносить некоторый поток прибыли. Проект является рискованным, т.е. после инвестирования может (с какой-то вероятностью) потерпеть неудачу, так и не начиная функционировать.

Для финансирования проекта инвестору необходимо взять кредит в банке. Поскольку у рискованного проекта существует вероятность невозврата кредита, соответствующая процентная ставка может быть достаточно высокой, но банк готов ее уменьшить при частичном возврате кредита.

С целью снижения процентной ставки и тем самым стимулирования прихода инвестора государство гарантирует банку возврат (в случае дефолта инвестора) определенной доли предоставленных проекту кредитов.

Цель работы – исследование проблемы оптимизации величины государственных гарантий.

1. Общая схема.

В основе работы лежит модель инвестиционных ожиданий [1], опирающаяся на теорию реальных опционов (см., например, [2]). В рамках такого рода моделей можно достаточно адекватно исследовать процесс инвестирования, в том числе, откладывание начала инвестирования до наступления более благоприятной с точки зрения инвестора ситуации, а также влияние на эти процессы различных факторов.

Проект является рискованным, т.е. после инвестиционного лага он с вероятностью q, $0<q<1$ остается нереализованным (терпит неудачу), инвестор объявляет дефолт; а с вероятностью $1-q$ начинает свое функционирование и приносит поток прибыли. Поток прибыли моделируется с помощью случайного процесса.

В каждый момент времени инвестор стоит перед дилеммой: либо сделать вложения в проект, либо отложить решение об инвестировании до наступления более благоприятного момента.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-06-00109 и 13-01-00784).

Предполагается, что вся сумма необходимых инвестиций берется в кредит на определенных условиях (кредитный договор). К этим условиям относятся сумма и срок выплаты кредита, график возврата основного тела кредита и проценты по кредиту. Указанные элементы будем называть кредитной политикой банка (по отношению к данному инвестиционному проекту).

Если проект начал функционировать, то возврат кредита и начисленных по нему процентов начинается после окончания инвестиционного лага.

Если проект остался нереализованным (потерпел неудачу), кредит инвестором не возвращается, однако банк получает (в момент окончания инвестиционного лага) от государства компенсацию (гарантированный возврат) в виде определенной доли от суммы выданного кредита.

Налоговая система представлена в модели коэффициентом налоговой нагрузки, который равен доли прибыли, созданной фирмой, идущей на уплату налогов.

2. Выбор оптимального момента инвестирования.

Поведение инвестора предполагается рациональным в том смысле, что, наблюдая (в каждый момент времени) информацию о сложившихся рыночных ценах и прогнозе будущего потока прибыли от проекта, он может либо принять решение об инвестировании, либо отложить его до наступления более благоприятной ситуации. Задача инвестора состоит в том, чтобы на основе наблюдаемой (в каждый момент времени) информации о сложившихся рыночных ценах и прогнозе будущего потока прибыли от проекта выбрать момент инвестирования таким образом, чтобы ожидаемый чистый доход инвестора от проекта, приведенный к нулевому (базовому) моменту времени (NPV), был максимальным.

Этот оптимальный момент инвестирования является, вообще говоря, случайной величиной (марковским моментом) и определяет поведение инвестора.

Будем предполагать, что поток прибыли описывается процессом геометрического броуновского движения с заданными темпом роста и волатильностью (характеризующей неопределенность).

Доказывается, что оптимальный момент инвестирования в описанной модели порождается правилом инвестирования, которое в свою очередь определяется некоторым порогом. Зависимость этого порога от параметров модели (среднего темпа роста и волатильности прибыли, коэффициента налоговой нагрузки, дисконта, условий кредитования, вероятности реализации проекта, доли гарантированного возврата) записывается в явном виде. Для близкой модели аналогичная формула была получена в [3], а для строгого доказательства оптимальности момента инвестирования используются результаты о пороговых стратегиях в задачах оптимальной остановки [4].

3. Проблема выбора доли возврата кредита.

Величина доли кредита, возвращаемого государством банку в случае неудачи проекта, влияет на процент, под который банк выдает кредит на инвестиционный проект, и тем самым определяет оптимальный момент инвестирования.

Поскольку использование механизма государственных гарантий инвестиций в рискованные проекты связано с прямыми затратами бюджетных средств, возникает естественная проблема выбора "рационального" (в каком-то смысле) механизма.

Критерий для сравнения различных вариантов выбора доли гарантированного возврата кредита при инвестировании рискованного проекта – бюджетный эффект, равный разности между ожидаемыми налоговыми поступлениям от проекта и ожидаемыми затратами государства по возврату банку соответствующей доли выданного кредита (при оптимальном поведении инвестора), приведенными к нулевому моменту времени.

4. Оптимизационный подход.

Для оценки потенциальных возможностей стимулирования инвестиций в рискованные проекты с помощью системы государственных гарантий по возврату кредитов предлагается оптимизационный подход, состоящий из двух этапов (ступеней).

На первом этапе при заданной доле возврата, зная зависимость поведения инвестора от кредитной политики, банк определяет оптимальную кредитную политику. Критерием оптимальности здесь выступает показатель "приведенной прибыли банка от кредитования проекта", который равен разности между ожидаемыми возвратами по кредиту (от инвестора в случае реализации проекта и от государства при дефолте инвестора) и суммой предоставленного кредита, приведенной к нулевому (базовому) моменту времени.

На втором этапе, зная оптимальную кредитную политику банка и соответствующее оптимальное поведение инвестора как функции от доли возврата, государство определяет оптимальную долю гарантированного возврата таким образом, чтобы соответствующий бюджетный эффект был максимальным. При этом максимум берется по всем долям возврата из заданного допустимого множества. Такие ограничения на долю возврата кредита могут быть связаны, например, с законодательными положениями или со "значимостью" данного проекта для государства.

При сделанных предположениях удается получить явный вид оптимальной кредитной политики банка и оптимальной доли гарантированного возврата кредита.

Показано, что оптимальная доля возврата убывает обратно пропорционально риску q и возрастает с ростом коэффициента налоговой нагрузки на проект. Что касается зависимости оптимальной доли возврата от волатильности проекта, то она определяется величиной налоговой нагрузки. При малых значениях коэффициента налоговой нагрузки (не превышающих некоторый уровень) оптимальная доля возврата убывает по волатильности, а при больших значениях (выше указанного уровня) – возрастает. Аналогичные выводы делаются также и относительно зависимости оптимального (с точки зрения банка) процента по кредиту от показателя риска проекта, коэффициента налоговой нагрузки и волатильности проекта.

Список литературы

1. *Аркин В.И., Сластников А.Д.* Инвестиционные ожидания, стимулирование инвестиций и налоговые реформы. // Экономика и математические методы. 2007. Т. 43, № 2. С. 76–100.

2. *Dixit A.K., Pindyck R.S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994.

3. *Аркин В.И., Сластников А.Д.* Выбор момента инвестирования в условиях неопределенности с учетом налоговой среды и механизма кредитования. // Обозрение промышленной и прикладной математики. 2010, Т. 17, № 5. С. 685–688.

4. *Аркин В.И., Сластников А.Д.* Пороговые правила остановки диффузионных процессов и задача Стефана. // Доклады Академии наук. 2012, Т. 446, № 3. С. 247–250.

Многокритериальная задача инвестирования в реальный сектор экономики

В.М. Гордуновский, С.Ю. Самохвалов, В.Г. Цедрик

МГИМО (Университет) МИД России, Москва, Россия

В докладе рассматривается задача формирования пакета инвестиционных проектов, который в условиях ограниченности ресурсов и противоречивости критериев эффективности давал бы наибольший эффект от долгосрочных капитальных вложений. Будем рассматривать инвестиционные проекты, которые допускают долевое участие при их осуществлении. Исходными данными для формирования компромиссного пакета являются: c_{it}- денежные потоки проектов, i-номер проекта, $i = 1, \dots, m$, t – номер временного интервала, $t = 1, \dots, T$, r – ставка процента, cc – средневзвешенная стоимость капитала (WACC), b_t – бюджетные ограничения. $t = 1, \dots, T$. Введём переменные x_i – доля финансового участия в проекте, $0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \dots, m$.

Рассматриваются следующие критерии эффективности пакета инвестиций. Сумма чистых дисконтированных поступлений (NPV) $\varphi_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \to \max$. Сумма дисконтированных доходов $\varphi_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,c_{it}\ge 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \to \max$. Сумма дисконтированных расходов $\varphi_3 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,c_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+r)^t} \to \min$. Сумма наращенных чистых поступлений (NTV) $\varphi_4 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T} c_{it}(1+r)^{T-t}x_i \to \max$. В этой задаче используются следующие линейные условия и ограничения [1], [2]. Внутренняя норма доходности (IRR) должна быть не меньше средневзвешенной стоимости капитала cc, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \ge 0$. Модифицированная внутренняя норма доходности (MIRR) должна быть не меньше средневзвешенной стоимости капитала cc, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T} c_{it}(1+cc)^{T-t}x_i + (1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \ge 0$. Срок окупаемости дисконтированного денежного потока (DPP) должен быть не более dpp, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge 0$. Бюджетные ограничения: $-\sum_{i=1}^{m} c_{it}x_i = b_t,\ t = 1, \dots, T$.

Для получения компромиссного решения применяется способ преобразования целевых функций в ограничения. Сначала найдём по отдельности оптимальные значения целевых функций φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 при ограничениях на величины IRR, MIRR, DPP, бюджета и долевого участия в инвестициях (основные ограничения). Получаем оптимальные значения критериев эффективности: φ_1^{max}, φ_2^{max}, φ_3^{min}, φ_4^{max}. Далее введём новую переменную y - относительное значение экономических показателей и преобразуем критерии эффективности в безразмерные ограничения (дополнительные ограничения). Ограничение по сумме чистых дисконтированных поступлений $\frac{1}{\varphi_1^{max}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} + y \ge 1$. Ограничение по сумме дисконтированных доходов $\frac{1}{\varphi_2^{max}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,c_{it}\ge 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} + y \ge 1$. Ограничение по сумме дисконтированных расходов $\frac{1}{\varphi_3^{min}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,c_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+r)^t} - y \le 1$. Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений $\frac{1}{\varphi_4^{max}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T} c_{it}(1+r)^{T-t}x_i + y \ge 1$. Окончательно, чтобы найти компромиссное решение

многокритериальной задачи, решаем следующую задачу линейного программирования с переменными x_i, $i = 1, \dots, m$ и y. Целевая функция $L = y \to \min,\ y \geq 0$. Ограничениями является система основных и дополнительных ограничений.

Решение задачи иллюстрирует вычислительный пример. Исходные данные: $(c_{1t})=(-10\quad 30\quad 5)$, $(c_{2t})=(-5\quad 5\quad 20)$, $(c_{3t})=(-5\quad 5\quad 15)$, $(c_{4t})=(0\quad -40\quad 60)$, $m=4$, $t = 0,1,2$, $b_{t=0} = 10$, $b_{t=1} = 10$, $r = 0,1$, $cc = 0,5$, $dpp = 2$.

Оптимальные решения по каждому критерию в отдельности: критерий максимума суммы чистых дисконтированных поступлений $\varphi_1^{\max}$ =36,694, x_1=0,5, x_2=1, x_3=0, x_4=0,75; критерий максимума суммы дисконтированных доходов $\varphi_2^{\max}$ = 80,992, x_1= 1, x_2=0, x_3=0, x_4=1; критерий минимума суммы дисконтированных расходов φ_3^{min} = 28,182, x_1= 0, x_2=1, x_3=1, x_4=0,5; критерий максимума суммы наращенных чистых поступлений $\varphi_4^{\max}$ = 44,400, x_1= 0,5, x_2=1, x_3=0, x_4=0,75.

Окончательно, математическая модель определения компромиссного решения имеет вид. Целевая функция $L = y \to \min, y \geq 0$. Критерии эффективности, преобразованные в дополнительные ограничения: $\frac{1}{36,694}\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0}^{2}\frac{c_{it}x_i}{(1+0,1)^t} + y \geq 1$, $\frac{1}{80,992}\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0,c_{it}\geq 0}^{2}\frac{c_{it}x_i}{(1+0,1)^t} + y \geq 1$, $\frac{1}{28,182}\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0,c_{it}<0}^{2}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+0,1)^t} - y \leq 1$, $\frac{1}{44,400}\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0}^{2} c_{it}(1+0,1)^{2-t}x_i + y \geq 1$. Основные ограничения: $\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0}^{2}\frac{c_{it}x_i}{(1+0,5)^t} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0}^{2} c_{it}(1+0,5)^{2-t}x_i + (1+0,5)^2\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0}^{2}\frac{c_{it}x_i}{(1+0,5)^t} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{4}\sum_{t=0}^{2}\frac{c_{it}x_i}{(1+0,1)^t} \geq 0$, $-\sum_{i=1}^{4} c_{i0}x_i = 10$, $-\sum_{i=1}^{4} c_{i1}x_i = 10$, $0 \leq x_{i=1,2,3,4} \leq 1$.

Оптимальное решение: $L^{\min}$ =0,157, x_1= 0,244, x_2=1,000, x_3= 0,512, x_4= 0,622. Основные экономические характеристики компромиссного пакета инвестиций: $NPV^{com} = 35,636$, $PI^{com} = 2,093$, $IRR^{com} = 1,121$, $MIRR^{com}$ =0,825, $DPP^{com} = 2$, $NTV^{com} = 43,119$.

Список литературы

1. *Гордуновский В.М., Самохвалов С.Ю.* Модель эффективного инвестирования в реальный сектор экономики // Труды VI московской международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 89-90.

2. *Гордуновский В.М., Самохвалов С.Ю.* Линейная математическая модель формирования пакета реальных инвестиций // Современный менеджмент: проблемы и решения. Материалы международной научно-практической конференции. Новосибирск: ЭНСКЕ, 2010. С. 51-59.

Обобщенная модель CGS с зависящей от возраста силой смертности

Л.Л. Делицын

МГУКИ, Химки, Россия

Аннотация. Мы предлагаем обобщение аналитической модели распространения нововведений CGS [1], учитывающее изменение силы смертности с возрастом. Предполагается, что плотности на единицу возраста количества пользователей и потенциальных пользователей нововведения, удовлетворяют системе нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с нелокальными граничными условиями. Для решения этих уравнений введены две вспомогательные функции времени $u(t)$ и $v(t)$, которые удовлетворяют системе линейных интегральных уравнений Вольтерра. В стабильной популяции оба уравнения системы становятся уравнениями свертки, что позволяет применить для их решения преобразование Лапласа.

Введение. Модель CGS.

Ф.Центроне, А.Гойя и Э.Салинелли [1] построили и проанализировали модель распространения нововведения с учетом рождаемости и смертности для случая, когда

1) сила смертности $\mu(t,\pi) \equiv \mu$ не зависит от возраста индивида;

2) коэффициенты рождаемости не зависят от возраста;

3) популяция стабильна (возрастная структура не меняется во времени);

4) все новорожденные пополняют класс потенциальных пользователей;

5) нет таких индивидов, которым нововведение недоступно по финансовым или техническим причинам;

6) функция риска стать пользователем $h(t,\eta(t))$ не зависит от возраста индивида.

Преимуществом этой модели, которая в [1] названа моделью CGS, по сравнению с классической логистической моделью, является возможность анализа влияния естественного роста населения на распространение инноваций. Для уравнений модели CGS её авторами получено явное решение [1].

Обобщённая модель CGS

Модель CGS справедлива лишь для постоянной силы смертности. В предлагаемом нами обобщении модели CGS сила смертности зависит от момента рождения индивида (или, эквивалентно, от его возраста). Ослабляя также ограничение (4), мы допускаем немедленное зачисление в пользователи нововведения детей, рождённых в семьях пользователей (аналогично наследственным болезням). Пусть нововведение начинает распространяться в момент $t_0 = 0$. Плотности (на единицу возраста) количества реальных и потенциальных пользователей $x(t,\pi)$ и $y(t,\pi)$ нововведения, рожденных в момент π, при $t \ge \pi$ удовлетворяют уравнениям баланса [2]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = h(t,\eta(t))y(t,\pi) - \mu(t,\pi)x(t,\pi)\,,\ \frac{\partial y}{\partial t} = -h(t,\eta(t))y(t,\pi) - \mu(t,\pi)y(t,\pi) \qquad (1)$$

с нелокальными граничными условиями для поколений (при $t \ge 0$)

$$x(t,t) = b_x X(t) + b_y Y(t)\,,\ y(t,t) = (b-b_x)X(t) + (b-b_y)Y(t)\,, \qquad (2)$$

где численности пользователей $X(t)$ и потенциальных пользователей $Y(t)$ вычисляются при помощи интегрирования по моменту рождения π

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t,\pi)d\pi\,,\ Y(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t,\pi)d\pi\,,\ K(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t,\pi)d\pi\,, \qquad (3)$$

а их доли в населении суть

$$\xi(t) = X(t)/K(t) \text{ и } \eta(t) = Y(t)/K(t)\,. \qquad (4)$$

Здесь $K(t)$ – описывает полную численность населения, $k(t,\pi)$ – плотность популяции на единицу возраста. Функции $k(t,\pi)$ считаются известными и непрерывными при $t \ge \pi$:

$$k(t,\pi) = bK(\pi)l(t,\pi) \text{ при } t \ge \pi > 0\,,\ k(t,\pi) = k(0,\pi)\frac{l(t,\pi)}{l(0,\pi)} \text{ при } t > 0 \ge \pi\,, \text{ иначе } k(t,\pi) = 0.$$

Граничные условия (2) содержат два новых параметра по сравнению с CGS: b_x – определяет количество детей, которые родились в семьях пользователей, и которые обучены (дома или в школе) использованию нововведения; b_y – определяет количество детей, которые обучены в обязательном порядке (в школе), хотя их родители к моменту t и не являются пользователями.

Заданы начальные условия

$$y(t_0,\pi) = \phi(\pi)\,,\ x(t_0,\pi) = k(t_0,\pi) - \phi(\pi)\,. \qquad (5)$$

Определим функцию дожития

$$l(t,\pi) = \exp\left(-\int_{\pi}^{t} \mu(\theta,\pi)d\theta\right) \text{ для } t \ge \pi \qquad (6)$$

и плотность распределения популяции по моментам рождения (по возрастам)

$$\rho(t,\pi) = k(t,\pi)/K(t) = b \cdot l(t,\pi)K(\pi)/K(t)\,. \qquad (7)$$

Как и в модели CGS, функция риска стать пользователем $h(t,\eta(t))$ не зависит от π.

Определим также две вспомогательные функции

$$u(t) = \begin{cases} \exp\left(\int_0^t h(\theta,\eta(\theta))d\theta\right) & для \quad t \ge 0 \\ 1 & для \quad t < 0 \end{cases} \text{ и } v(t) = \begin{cases} \eta(t)u(t) & для \quad t \ge 0 \\ \eta(0) & для \quad t < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Утверждение 1 (лемма эквивалентности). Решения интегральных уравнений

$$y(t,\pi) = \begin{cases} y(\pi,\pi)l(t,\pi)\dfrac{u(\pi)}{u(t)} & для \quad t \ge \pi > 0 \\ y(0,\pi)\dfrac{l(t,\pi)}{l(0,\pi)}\dfrac{1}{u(t)} & для \quad t \ge 0 \ge \pi \\ 0 & для \quad t < \pi \end{cases} \qquad (9)$$

являются также решениями интегро-дифференциальных уравнений (1) с условиями (2) и (5), и наоборот, решения (1), (2), (5) удовлетворяют (9).

Утверждение 2 (аналог уравнения восстановления).

Функции $v(t)$ и $u(t)$ связывает уравнение

$$v(t) = \eta_0(t) + \delta_x \int_0^t \rho(t,\theta) u(\theta) d\theta + \delta_{xy} \int_0^t \rho(t,\theta) v(\theta) d\theta, \tag{10}$$

где $\eta_0(t) = \frac{1}{K(t)} \int_{-\infty}^{0} \phi(\pi) \frac{l(t,\pi)}{l(0,\pi)} d\pi$ – доля потенциальных пользователей, рожденных не позже $t_0 = 0$ и доживших до t; $\delta_x = \frac{b - b_x}{b}$ и $\delta_{xy} = \frac{b_x - b_y}{b}$ – коэффициенты.

Доказательства утверждений 1 и 2 приведены в [2] .

Утверждение 3 (следствие выбора формы функции риска).

Примем предположение Ф.Басса о линейной по $\xi(t)$ функции риска

$$h(t, \eta(t)) = p + q\xi(t) = p + q - q\eta(t). \tag{11}$$

Тогда легко показать, что функции $u(t)$ и $v(t)$ связаны вторым интегральным уравнением

$$u(t) = e^{(p+q)t} - q \int_0^t e^{(p+q)(t-\theta)} v(\theta) d\theta. \tag{12}$$

Уравнения (10) и (12) образуют систему линейных интегральных уравнений Вольтерра. В векторных обозначениях

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \int_0^t \mathbf{G}(t,\theta) \mathbf{f}(\theta) d\theta, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} e^{(p+q)t} \\ \eta_0(t) \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{G}(t,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -qe^{(p+q)(t-\theta)} \\ \delta_x \rho(t,\theta) & \delta_{xy} \rho(t,\theta) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Теорема [3]. Если $\mathbf{g}(t)$ и $\mathbf{G}(t,\theta)$ непрерывны в треугольнике $0 \le \theta \le t \le T$ (в смысле непрерывности всех их компонент), то система (13) имеет единственное непрерывное решение на отрезке $0 \le t \le T$.

Отсюда вытекает существование решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1), если функции $l(t,\pi)$ непрерывны.

Следствие. Пусть 1) функция дожития $l(t,\pi) = l(t-\pi)$ зависит только от разности аргументов; 2) популяция стабильна при $t \ge 0$: $K(t) = K(0)e^{\lambda t}$; 3) популяция и ранее была стабильной, поэтому начальные условия имеют вид $k(0,\pi) = K(0)e^{b\pi}$.

Тогда $\rho(t,\pi)$ и $\mathbf{G}(t,\theta)$ зависят только от разности аргументов, и уравнения (13) становятся уравнениями свёртки.

Следствие. Применяя к (15) преобразование Лапласа, находим изображения $\tilde{u}(s)$ и $\tilde{v}(s)$

$$\tilde{u}(s) = \frac{1 - q\tilde{\eta}_0(s) - \delta_{xy}\tilde{\rho}(s)}{s - p - q + \left(q\delta_x - \delta_{xy}(s - p - q)\right)\tilde{\rho}(s)} \text{ и } \tilde{v}(s) = \frac{\tilde{\eta}_0(s) + \delta_x \tilde{\rho}(s)\tilde{u}(s)}{1 - \delta_{xy}\tilde{\rho}(s)} \tag{15}$$

Далее в работе обсуждаются практические проблемы применения дискретного преобразования Фурье для обращения уравнений (15) и приводятся численные примеры.

Список литературы

1. *Centrone F., Goia, A., Salinelli E.* Demographic processes in a model of innovation diffusion with a dynamic market // Technological Forecasting and Social Change, 74, 2007. – pp. 247-266.

2. *Делицын Л.Л.* Обобщенная модель CGS распространения нововведения в растущей популяции // Труды вольного экон. общества России. – 2010. – т.164. – С.412-420.

3. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. – SIAM Studies in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, Pa., 1985.

Комплексная оценочная модель MERGE: структура и возможности применения к моделированию социально-экономической динамики*

Б.В. Дигас, В.Л. Розенберг

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Задача прогнозирования климатических изменений и смягчения их последствий является одной из наиболее актуальных проблем, стоящих перед современным миром. Хотя нет общепризнанной точки зрения на природу движущих сил динамики климата и на возможность управления ею, многие эксперты сходятся во мнении, что наблюдающиеся в последнее столетие резкие изменения климата в определенной степени объясняются увеличением концентрации в атмосфере парниковых газов по причине антропогенного воздействия, которое проявляется, прежде всего, в значительном увеличении потребления ископаемого топлива. Для изучения различных аспектов проблемы изменения климата привлекаются так называемые комплексные оценочные модели, имеющие, как правило, междисциплинарный характер. Их основной функцией является построение множества возможных сценариев развития социально-экономических систем (как глобальной, так и региональных) с последующим выбором, на основании определенных критериев качества, оптимальной траектории. Поэтому такие модели могут использоваться компетентными органами, принимающими решения, как инструмент оценивания той или иной стратегии экономического развития. Во время дискуссий о целесообразности участия России в международных инициативах по сокращению выбросов парниковых газов хорошо зарекомендовала себя модель MERGE, разработанная американскими учеными [1, 2] и модифицированная в Международном институте прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия) и Институте математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, Россия) [3, 4]. Эта модель позволяет формализовать и количественно оценить результаты применения различных стратегий сокращения выбросов парниковых газов и стратегий внедрения новых энергетических технологий. Она состоит из трех связанных между собой модулей (экономико-энергетического, климатического и оценки ущерба) и при расчетах до 2100 года содержит более 20 тысяч уравнений и неравенств и 30 тысяч скалярных переменных.

Экономико-энергетический модуль модели MERGE предназначен для моделирования на достаточно большом временном интервале динамики социально-экономических систем (в частности, ВВП, развития производственного и энергетического секторов, импорта/экспорта энергоносителей, выбросов парниковых газов). Его специфика состоит в формализации и количественной оценке затрат на выполнение различных природоохранных мер на региональном и глобальном уровнях. Во всех версиях этого модуля мир делится на регионы, каждый из которых рассматривается как независимая действующая сила (единый производитель-потребитель) и подчиняется финансовым ограничениям. Модуль представляет собой полностью интегрированную прикладную модель общего равновесия. В каждый момент времени спрос и предложение уравниваются посредством выбора цен на товары, задействованные в международной торговле, именно, цен на нефть, газ, уголь, потребительские товары и квоты на эмиссию парниковых газов. Данный модуль является не набором рекурсивных процедур, которые определяют состояние системы по ее предыстории, а оптимизатором, находящим оптимальные траектории экономико-энергетического развития регионов из условия максимума суммы (по всему интервалу времени) дисконтированных полезностей регионального потребления, т.е. так называемого благосостояния Негиши. Оптимизационная задача представляет собой задачу нелинейного программирования, для решения которой используется метод последовательной совместной максимизации, обеспечивающий сходимость к одному из равновесных состояний системы на всем временном интервале. Входными параметрами экономико-энергетического модуля являются население, его динамика, прогноз роста ВВП на душу населения, макроэкономические параметры, энергетические характеристики (в частности, углеродные показатели энергопотребления, определяющие выбросы для различных технологий). Выходными параметрами модуля являются оптимальная динамика экономического развития региона, в частности, реализовавшийся ВВП и его характеристики (карбоноемкость, структура (потребление, инвестиции, экспорт/импорт)), энергетические выбросы парниковых газов (определяются величиной ВВП, его энергоемкостью и углеродными показателями энергопотребления), гипотетические затраты на снижение выбросов в соответствии с внешними ограничениями (например, согласно инициативам типа Киото-протокола). Климатический модуль учитывает наиболее важные антропогенные парниковые газы и рассчитывает их концентрации в атмосфере и океане по эмиссиям и доиндустриальному уровню. Концентрации используются для определения фактического изменения температуры, которое подается на вход модуля оценки ущерба,

* Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Перспективы скоординированного социально-экономического развития России и Украины в общеевропейском контексте», проект 12-П-1-1038.

анализирующего два типа последствий изменения климата, именно рыночные и нерыночные (экологические) потери. Рыночный ущерб включает те категории, которые входят в национальный доход, измеряемый обычным способом, и могут быть оценены с помощью цен и функций спроса и предложения. Фактически ущерб этого типа трактуется как доля ВВП, которая теряется вследствие климатических изменений, обусловленных увеличением температуры. Многие эксперты полагают, что в различных экономических выкладках следует пользоваться именно так называемым «зеленым ВВП», учитывающим указанные потери. Нерыночные эффекты не связаны с ценами и должны оцениваться другими методами (в том числе, посредством анализа предпочтений будущих поколений).

В рамках данной работы проведена адаптация модели MERGE к текущему состоянию мировой и региональной экономики и реализована возможность выделения среди макроэкономических субъектов регионов России и Украины, как отдельно, так и в виде единого блока с целью изучения преференций скоординированного развития двух стран. В качестве возможных целей моделирования отметим получение оптимальной динамики структуры регионального энергетического сектора (критерии качества – максимизация регионального потребления и минимизация потерь ВВП от применения природоохранных мер, направленных на снижение выбросов парниковых газов).

Список литературы

1. *Manne A., Mendelson R., Richels R.* MERGE – a Model for Evaluating Regional and Global Effects of GHG reduction policies // Energy Policy. 1995. Vol. 23. No. 1. P. 17–34.

2. *Manne A.* Energy, the environment and the economy: hedging our bets // Global Climate Change / Ed. by J.M. Griffin. Edward Elgar, Northampton, MA, 2000.

3. *Kryazhimsky A., Minullin Ya., Schrattenholzer L.* Global long-term energy-economy-environment scenarios with an emphasis on Russia // Perspectives in Energy Journal. 2005. Vol. 9. P. 119–137.

4. *Digas B.V., Rozenberg V.L.* Application of an optimisation model to studying some aspects of Russia's economic development // Int. J. Environmental Policy and Decision Making. 2010. Vol. 1. No. 1. P. 51–63.

Нерегулярные точки в задаче о внешнем долге*

В.В. Дикусар, Н.Н. Оленев

ВЦ РАН, Москва, Россия

В данной работе предложено использовать метод распределенных параллельных вычислений [1] в численном решении задач оптимального управления с особыми режимами. В качестве примера приведены вычисления для задачи о внешнем долге [2]. При этом используется двухэтапный метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями [3]. На первом этапе решается дискретная задача (системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и несобственные задачи линейного программирования (ЛП) [4]), на основе методов факторного анализа [5]. Далее формулируется гипотеза о геометрии оптимальной траектории, то есть выделяются промежутки времени постоянства множества номеров активных ограничений. На втором этапе сформулированная гипотеза проверяется аналитически с использованием принципа максимума Понтрягина и формализма Дубовицкого-Милютина [6]. На модеди внешнего долга проведена процедура формирования и проверки гипотезы о геометрии оптимальной траектории. Представлены рассчитанные траектории фазовых переменных.

Математическая модель внешнего долга описывает двухсекторную экономическую систему, первый сектор которой добывает ресурсы, а второй производит продукцию конечного потребления (фондообразующую). Погашение долга происходит за счет продажи продукции первого сектора. Минимизируемый функционал - долг.

Модель представлена системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = u_3 + u_4, \\ \dot{x}_3 = \mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - \kappa u_6, \\ \dot{x}_4 = \beta_1 u_6, \\ \dot{x}_5 = \beta_2 u_7, \end{cases} \qquad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00916, 11-07-00201, 13-07-01020), ПФИ Президиума РАН П-15, проект 106; и ПФИ ОМН РАН №3, проект 3.14.

где фазовые переменные $x_1,\ldots,x_5$ представляют собой, соответственно, суммарные объемы инвестиций в первый и второй сектора, внешний долг, а также суммарные амортизации фондов в рассматриваемых секторах экономики. Управления задают потоки: u_1,u_3 - внешних инвестиций в сектора, u_2,u_4 - фондообразующей продукции из второго сектора в оба сектора, u_5 - импорта потребительских товаров, u_6,u_7 - произведенной продукции секторов. Положительные постоянные параметры имеют очевидный экономический смысл: β_1,β_2 - коэффициенты амортизации, μ_3 - процент на задолженность, - доля экспорта в выпуске первого сектора, идущая на погашение долга.

Фазовые ограничения типа неравенств:

$$\begin{aligned}&0\le x_1(t)-x_4(t),\\&FOND_{2\min}\le x_2(t)-x_5(t),\\&0\le x_3(t)\le x_{3\max}.\end{aligned}\qquad(2)$$

Смешанные ограничения типа неравенств:

$$\begin{aligned}&g_1(x,u,t)=u_6(t)-\alpha_1\left(x_1(t)-x_4(t)\right)\le 0,\\&g_2(x,u,t)=u_7(t)-\alpha_2\left(x_2(t)-x_5(t)\right)\le 0.\end{aligned}\qquad(3)$$

Ограничения на управляющие функции типа неравенств:

$$\begin{aligned}&g_{i0}(x,u,t)=-u_i(t)\le 0, g_{i1}(x,u,t)=u_i(t)-u_{i\max}\le 0,\ i=\overline{1,\ 7},\\&g_3(x,u,t)=u_2(t)+u_4(t)-u_7(t)\le 0,\\&g_4(x,u,t)=u_2(t)+u_4(t)+c_2-u_5(t)-u_7(t)\le 0.\end{aligned}\qquad(4)$$

Начальные и краевые условия:

$$x_1(0)=x_{10},\ x_2(0)=x_{20},\ x_3(0)=x_{30},\ x_4(0)=x_{40},\ x_5(0)=x_{50}\qquad(5)$$

$$x_1(T)-x_4(T)=FOND_{11},\ x_2(T)-x_5(T)=FOND_{21}.\qquad(6)$$

Целевая функция:

$$x_3(T)\to\min$$

при наличии ограничений (1) – (6).

Значения коэффициентов задачи, начальных и конечных условий:

$\alpha_1=0.03,$	$x_1(0)=x_{10}=25,$	$u_{i\min}=0,\ i=\overline{1,7},$
$\alpha_2=0.03,$	$x_2(0)=x_{20}=15,$	$u_{1\max}=u_{3\max}=0.1,$
$\beta_1=0.18,$	$x_3(0)=x_{30}=400,$	$u_{2\max}=0.5,$
$\beta_2=0.18,$	$x_4(0)=x_{40}=0,$	$u_{4\max}=u_{5\max}=0.3,$
$\kappa_1=0.9,$	$x_5(0)=x_{50}=0,$	$u_{6\max}=u_{7\max}=2.0,$
$\mu_3=0.002,$	$x_1(T)-x_4(T)=F_{11}=25,$	$c=0.2.$
$T=100,$	$x_2(T)-x_5(T)=F_{21}=15,$	

Нерегулярные точки

$$h_6(x,u)=u_6-\alpha_1(x_1-x_4)\le 0,\quad u_6=u$$

$$h_7(x,u)=u_7-\alpha_2(x_2-x_5)\le 0,\quad u_7=v$$

$$g_6(x,u)=u_6-u_{6\max}\le 0,\quad g_7(x,u)=u_7-u_{7\max}\le 0$$

$$\frac{d}{du}(g_6-h_6)=0\ \Rightarrow\ x_1-x_4=0\ \Rightarrow\ \dot{x}_1-\dot{x}_4=0$$

$$\frac{d}{dv}(g_7-h_7)=0\ \Rightarrow\ x_2-x_5=0\ \Rightarrow\ \dot{x}_2-\dot{x}_5=0$$

$$L=\sum_{i=1}^{5}\dot{x}_i\psi_i+\lambda_6h_6+\lambda_7h_7+h_6\frac{d\mu_6}{dt}+h_7\frac{d\mu_7}{dt}$$

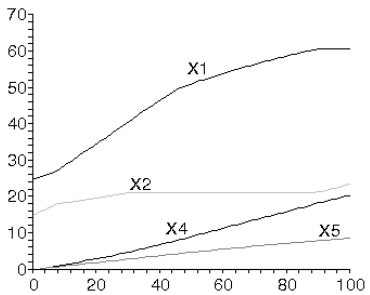
$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial L}{\partial x_i}.$$

Решение дискретной аппроксимации с помощью Факторного анализа

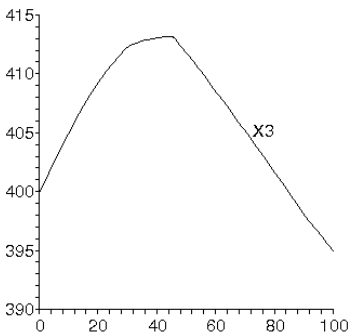
При рассмотрении совокупности семи дискретных управлений и пяти фаз при $k=\overline{0,N}$, как координат точки в $(7+5)\times(N+1)$-мерном пространстве, конечно-разностную аппроксимацию задачи ОУ можно представить в виде задачи ЛП. Решение дискретной аппроксимации задачи позволяет сделать предварительную оценку решения задачи и сформировать гипотезу о геометрии оптимальной траектории, то есть ответить на вопрос, какие из ограничений являются активными в каждый момент времени $t\in[0,T]$.

В данной работе при дискретизации задачи использовались схемы Эйлера первого и второго порядков точности (явная схема Эйлера и модифицированная схема Эйлера). Для ускорения расчетов применялись параллельные вычисления на кластере МСЦ РАН.

В качестве иллюстрации на рис.1-2 приведены графики полученных в расчете фазовых переменных.



Фиг. 1. Фазовые переменные $x_1(t), x_2(t), x_4(t), x_5(t)$



Фиг. 2. Фазовая переменная $x_3(t)$

Список литературы

1. *Оленев Н.Н.* Основы параллельного программирования в системе MPI. М.: ВЦ РАН. 2005. 80 с.
2. *Дикусар В.В., Чекарев Д.А.* Численно-аналитический метод решения задач оптимального управления. М.: ВЦ РАН, 2004.
3. *Умнов А.Е., Умнов Е.А., Чекарев Д.А.* Параметрический двухуровневый метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями // Моделирование процессов управления: Сб.ст./Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 2004.
4. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование, М.: Факториал, 1998.
5. *Харман Г.* Современный факторный анализ М.: Статистика, 1972.
6. *Дубовицкий А.Я.,Милютин А.А.* Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями // Вероятностные процессы и управление. М.: Наука, 1978.
7. *Хачай М.Ю.* Комитетные решения несовместных систем ограничений и методы обучения распознаванию // Автореферат докторской дисс. М.: ВЦ РАН, 2004.
8. *Горелик В.А., Ерохин В.И.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2004. - С. 35-63.
9. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Моллаверди Н.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // ЖВМиМФ, 2004, том 44, № 9. С. 1564-1573.

Анализ модели несовершенного рынка и результаты ее идентификации*

А.А. Жукова, И.Г. Поспелов

ВЦ РАН, Москва, Россия

Целью данной работы является исследование поведения агентов на несовершенном рынке. Мы концентрируемся свое исследование на несовершенствах связанных с временем осуществления торговых сделок. Наблюдения свидетельствуют, что во многих случаях индивиды не совершают сделки непрерывно. В некоторых случаях агенты на рынке не могут найти контрагента с нужным товаром или предпочитают ждать более выгодного предложения, в других отказываются от сделки вследствие транзакционных издержек и налогов. В результате сделки связаны с задержками по времени и эти задержки часто непредсказуемы. Важно изучить, как распределение моментов времени сказывается на принятии решений агентами.

Эффект нечастых сделок широко изучается в рамках теории оценки стоимости финансовых активов, которая была основана на работах Роберта Мертона [1]. Отчасти, необходимость введения в классические модели предположения о нечастых сделках связана с тем, что предсказания моделей с непрерывным временем плохо соответствуют эмпирические наблюдениям [2]. Модели CAPM с транзакционными издержками при переформировании портфеля [3] и в присутствии товаров длительного пользования [4], показывают, что агенты могут стремиться отложить сделку чтобы избежать невыгодных затрат. В результате агенты формируют свою собственную последовательность моментов, наиболее выгодных для торговли.

Модели оптимального формирования портфеля с экзогенными, но заранее определенными периодами принятия решения о сделке были предложены в [5]. Следующим шагом является предположение об экзогенных, но случайных моментах потребления и переформирования портфеля. Это было введено в недавней статье [6], которая изучает стандартную модель Мертона с возможностью торговать неликвидным активом. В ней цены активов описываются геометрическим Броуновским движением с постоянным параметром сноса, а процесс сделок с неликвидными активом - пуассоновским случайными процессом. Однако, предположение о постоянном параметре сноса сужает класс возможных для анализа ситуаций и требуется расширение исследуемого класса. Динамика цен в модели, которая представлена в данной работе может иметь достаточно общую форму.

В данной статье исследуется стилизованная модель оптимального поведения рационального агента на рынке со случайными моментами возможных сделок. Такая задача возникает в макроэкономическом моделировании при введении динамики цен в стиле Calvo, когда в случайным образом агент получает возможность переменить свою стратегию, в то время как большую часть времени он этого делать не может. Процесс моментов возможностей сделки описан пуассоновским потоком, что соответствует стилю моделей несовершенного рынка Даймонда [7].

Анализ модели поведения отдельного агента представленный в данной работе характеризует решение и при некоторых значениях параметров позволяет найти решение в явной форме. Мы также демонстрируем применение достаточных условий оптимальности к задачам такого типа. Мы демонстрируем, что решение линейно по переменной богатства агента и оптимальное значение функционала однородно относительно этой переменной, а коэффициенты зависят от функции цены. Это соответствует решению в стандартной модели ценообразования активов и результатами эволюционной теории финансовых рынков (см [8]). Наиболее важным является то, что предел оптимального решения в случае бесконечно большой частоты сделок, когда торговля становится практически непрерывной, отличается от стандартного решения задачи в при возможности непрерывно торговать. Мы связываем этот эффект с предположениями об информации доступной агенту в каждый момент времени.

Учитывая разнородность экономических агентов на рынке, вполне реалистично предполагать что процессы сделок не являются полностью синхронными для разных агентов. Поэтому возникает задача разработки подхода к анализу сложной системы индивидуальных процессов сделок на агрегированном уровне. Структура решения задачи отдельного агента подсказывает, что удобно объединять агентов в группы по значениям параметров или характеру решения. В отличие от объединения по моментам сделок, предложенном в [5], в данной модели более удобным оказывается группировать агентов по внутренним характеристикам. Во-первых, действия большого числа агентов с одинаковыми предпочтениями времени могут быть так агрегированы, что агрегированный макроагент описывается

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 12-01-00916-а (2011-2012), 12-01-31333, 12-01-31189; при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ 11-02-00241а («Построение многопродуктовой макроэкономической модели на основе дезагрегирования финансовых балансов»); ПФИ ОМН РАН №3, проект 3.14; ПФИ Президиум РАН №14, проект 109. Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 году. Расчеты выполнены на суперкомпьютере МВС-100К МСЦ РАН.

детерминированными уравнениями, что может быть удобнее чем стохастические дифференциальные уравнения. Во-вторых, выделенные по предпочтениям времени макроагенты могут быть разделены на группы в соответствии с режимом их оптимального поведения. В-третьих, рыночные показатели спроса и предложения могут быть получены агрегированием функций спроса и предложения отдельных макроагентов с учетом распределения благосостояния.

Агрегированное описание позволяет исследовать равновесие рынка товара, который торгуется с задержками по времени. Предполагая полное предвидение тех или иных параметров рынка, например, цен или заработных плат, мы можем найти равновесие рациональных ожиданий такого рынка. Показано, что динамика равновесных цен может иметь форму "пузыря", даже если агенты предвидят такой эффект.

Мы применили анализ данной модели к данным реального рынка. Мы использовали временной ряд цен и идентифицировали параметры модели, чтобы проиллюстрировать как динамика поведения агентов и их благосостояние реагируют на рыночные условия. Результаты вычислений показывают, что действия агентов изменяются в зависимости от предстоящих изменений цен: даже если движения цен происходят в одном и том же направлении, большие изменения приводят к выбору в пользу одного актива, а меньшие изменения позволяют агенту оставаться с диверсифицированным портфелем.

Список литературы

1. *Merton R.C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // Journal of Economic Theory. 1973. V. 3. P. 373 - 413.
2. *Gabaix X., Laibson D.* The 6D Bias and the Equity Premium Puzzle // NBER Macroceconomics Manual. 2002. V. 16. P. 257 -- 312.
3. *Davis Mark H.A., Norman A. R.* Portfolio Selection with Transaction Costs // Mathematics of Operations Research. - 1990. - V. 15. - P. 676-713.
4. *Grossman S.J., Laroque G.* Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods // Econometrica. 1990. V. 58. P. 25-51.
5. *Lynch Anthony W.* Decision Frequency and Synchronization Across Agents: Implications for Aggregate Consumption and Equity return // The Journal of FInance. September 1996. V LI, N.4. P. 1479 - 1497.
6. *Ang A., Papanikolaou D., Westerfield M.M.* Portfolio choice with illiquid asset // Working Paper. 2012.
7. *Diamond P.A.* Aggregate demand management in search equilibrium // Journal of Political Economy. 1992. V. 90, N. 5. P. 881 - 894.
8. *Evstigneev~I.V., Hens T., Schenk-Hoppe~K.R.* Local Stabilty Analysis of a Stochastic Evolutionary Financial Market Model with a Risk-Free Asset // Mathematics and Financial Economics. 2011. V. 5, N. 3. P. 185 - 202.

К модели инвестиционной политики фирм с учетом обучения персонала*

М.А. Макарова, Н.Н. Оленев

МФТИ, ВЦ РАН, Москва, Россия

В работах [1, 2] построена производственная функция, представимая распределением производственных мощностей по технологиям с учетом старения фондов. Предполагается, что в экономике производится один продукт и используется один ресурс – труд. Построения основаны на гипотезе 0, высказанной в [1].

Гипотеза 0: Число рабочих мест на производственной единице с течением времени остается неизменным, а выпуск продукции уменьшается с темпом μ.

В данной работе проделаны аналогичные расчеты, учитывающие обучение персонала, причем вместо Гипотезы 0 используется

Гипотеза 1: Число рабочих мест на производственной единице («фирме») с течением времени остается неизменным, а выпуск продукции $y(t)$ ограничен функцией мощности $m(t) = F(Y,t)m_0 \exp(-\mu t)$, где t – возраст фирмы, $Y = Y(t)$ – совокупный выпуск с момента основания, $Y(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$, m_0 – начальная мощность, а $F(Y,t)$ – монотонно возрастающая по обеим переменным, выпуклая и ограниченная функция.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00916, 11-07-00201, 13-07-01020), ПФИ Президиума РАН П-15, проект 106; и ПФИ ОМН РАН №3, проект 3.14.

Функция $F(Y,t)$ описывает рост отдачи, связанный с обучением персонала, причем ее зависимость от Y отражает обучение рабочих, а зависимость от t отражает обучение менеджмента фирмы, которое мало зависит от объемов производства. При этом функция $F(Y,t)$ ограничена, так как существует предельный уровень обучения.

Обозначим через $\theta(t)$ функцию загрузки мощностей, $0 \le \theta(t) \le 1$. Интенсивность производства в возрасте t равна $\theta(t)m(t)$, а число занятых $\theta(t)\lambda$, где λ – полное число рабочих мест на производственной единице. Доход фирмы $z(t) = \theta(t)\left(p(t)m(t) - s(t)\lambda\right)$, где – цена товара, – стоимость труда.

Свойства функции мощности $m(t)$:

1) $\lim_{n\to\infty} m(t) = 0$ (в силу ограниченности

2) $m'(t) = \left(F'_Y(Y,t)y(t) + F'_t(Y,t) - \mu F(Y,t)\right)m_0 \exp(-\mu t)$

Заметим, что функция производительности труда пропорциональна мощности: $\Lambda(t) = F(Y,t)m_0 \exp(-\mu t)/\lambda$.

Описание инвестиционной политики фирмы

Пусть в условиях модели некая фирма в момент создания 0 выбирает стратегию загрузки мощностей . При этом она предполагает, что цены и стоимость труда останутся постоянными. Тогда она решает задачу максимизации функционала:

$$\int_0^\infty z(t)\,dt = \int_0^\infty \theta(t)\left[pm_0 F\left(\int_0^t \theta(\tau)m(\tau)\,d\tau, t\right)\exp(-\mu t) - s\lambda\right]dt \to \max_{\theta(t)}$$

В общем случае эта задача не решается аналитически. Рассмотрим сначала частные случаи, затем найдем вид решения.

1. **Учет только обучения менеджмента ($F(Y,t) = F(t)$)**

$$\int_0^\infty z(t)\,dt = \int_0^\infty \theta(t)\left[pm_0 F(t)\exp(-\mu t) - s\lambda\right]dt \to \max_{\theta(t)}$$

Множитель в квадратных скобках зависит только от времени, следовательно, максимум функционала достигается, если $\theta(t) = I\left(F(t)\exp(-\mu t) - s\lambda/(pm_0)\right)$, где – индикаторная функция: $I(x) = 1$ при $x \ge 0$, $I(x) = 0$ при $x < 0$.

Значит, при $F(Y,t) = F(t)$ производство (полная загрузка мощности) идет тогда и только тогда, когда оно рентабельно, то есть приносит текущую прибыль.

2. **Общий случай ($F(Y,t)$)**

В случае, когда мы учитываем повышение производительности и рабочих и менеджмента, можно ожидать, что производство начнется раньше, чем оно начнет приносить прибыль, но позже момента 0. Докажем, что это действительно так, и найдем зависимость .

Задача оптимального управления

$$\int_0^T \theta(t)\left[s\lambda - pm_0 F(Y(t),t)\exp(-\mu t)\right]dt \to \min_{\theta(t)},$$

$$Y' = \theta(t)m_0 F(Y,t)\exp(-\mu t), \quad Y(0) = 0.$$

Функция Лагранжа

$$\Lambda = \int_0^T L(t)\,dt + l,$$

$$L = \theta(t)\left[s\lambda - pm_0 F(Y,t)\exp(-\mu t)\right] + r(t)\left(Y' - \theta(t)m_0 F(Y,t)\exp(-\mu t)\right),$$

$$l = \lambda Y(0).$$

Необходимые условия минимума:

1) Уравнение Эйлера для задачи оптимального управления

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial Y'}\right),$$

или

$-\theta(t)m_0F_Y'(Y,t)\exp(-\mu t)\left[p+r(t)\right]=r'(t)$.

2)Условия трансверсальности:

$r(T)=0$, $r(0)=s\lambda$,

- время окончания производства.

3)Условия стационарности по свободным концам:

$\theta(T)\left[pm_0F(Y,T)\exp(-\mu T)-s\lambda\right]=0$.

4)Условия минимума по управлению (в точках непрерывности $\theta(t)$)

$$\ddot{\theta}(t)=\arg\min\left[\theta(t)\left[s\lambda-pm_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right]+r(t)\left[Y'-\theta(t)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right]\right]$$

$$=\arg\min\left[\theta(t)\left[s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right]\right]$$

при ограничении $0\le\theta(t)\le1$.

Очевидно, решение задачи минимизации.

$$\theta(t)=\begin{cases}0, s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)>0,\\ 1, s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)<0.\end{cases}$$

Причем, так как знак $-\left(p+r(t)\right)$ совпадает со знаком $r'(t)$ (из условия 1)), то при $r'(t)>0$ выполняется $\theta(t)=0$, что противоречит уравнению Эйлера. Следовательно, на оптимальной траектории $r'(t)\le0$,и, так как $r(T)=0$, на всей траектории $r(t)\ge0$.

Рассмотрим, при каких условиях может произойти разрыв функции вида $\theta(t-0)=1$, $\theta(t+0)=0$

1)Если $\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t>0$, то

$$d\left(s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/dt=$$

$$=-m_0\left[r'(t)F(Y,t)\exp(-\mu t)+\left(p+r(t)\right)\left(\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t+F_Y'(Y,t)\exp(-\mu t)\right)\right]<0.$$

Таким образом, $\left(s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)(t-0)<0$, случай $\left(s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)(t-0)>0$ невозможен.

2) Если $\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t<0$, то так как

$$\partial^2\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t^2=$$

$$=F_{tt}''(Y,t)\exp(-\mu t)-2\mu F_t'(Y,t)\exp(-\mu t)+\mu^2F(Y,t)\exp(-\mu t)=$$

$$=F_{tt}''(Y,t)\exp(-\mu t)-\mu F_t'(Y,t)\exp(-\mu t)-\mu\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t.$$

При $\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t=0$ имеем $\partial^2\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t^2<0$, следовательно, в дальнейшем $\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t$ будет оставаться отрицательной.

Таким образом

$$d\left(s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/dt\Big|_{\theta(t)=0}=-m_0\left(p+r(t)\right)\partial\left(F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)/\partial t>0.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\theta(t)=\begin{cases}1, t\in(0,T),\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Найдем условия на *T* (время окончания производства).

Будем подразумевать под T последний момент, когда производство еще идет ($\theta(T)>0$). Тогда из условий стационарности по свободному концу

$pm_0F(Y,t)\exp(-\mu t)=s\lambda$.

Рассмотрим случай $F(Y,t)=F(Y)$.

$$d\left(s\lambda-\left(p+r(t)\right)m_0F(Y,t)\exp(-\mu t)\right)\Big/dt\Big|_{\theta(t)=0}=\mu m_0\left(p+r(t)\right)>0.$$

Следовательно, если $s\lambda-\left(p+r(0)\right)m_0F(0)\le 0$, то производство не начнется вообще. Итак, в случае $F(Y,t)=F(Y)$ либо $t_0=0$, либо $\theta(t)\equiv 0$.

Список литературы

1. *Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И. Г.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства типа // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М: Наука, 1986. С. 46-60.

2. *Оленев Н.Н., Поспелов И. Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М: Наука, 1986. С. 163-173.

3. *Конягин С.В.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: МГУ, 2005.

Слабые звенья, «мизаллокация» и динамика агломераций*

В.Д. Матвеенко

НИУ ВШЭ, Санкт-Петербург, Россия

В центре внимания экономики развития сейчас находятся вопросы нерационального использования ресурсов (misallocation) – см. [1, 4, 5, 6]. Часто это явление связано с наличием слабых звеньев в той или иной сетевой экономической структуре [5, 6]. Моделью структуры со слабыми звеньями может служить производственная функция Леонтьева [5] или система таких функций [8]. Содержательно слабые звенья часто связаны с недостаточными размерами существующих положительных экстерналий [8]. Сетевые структуры с положительными экстерналиями играют особую роль в городах и агломерациях [7], где, в частности, особенно важны экстерналии знаний [2].

Джонс [5] предложил модель с континуумом производителей и с агрегирующей промежуточные продукты производственной функцией типа CES с эластичностью замещения меньше единицы; последняя, как известно, сводится в предельном случае к функции леонтьевского минимума. В [5] выдвинута гипотеза о том, что ограничение слабого звена ослабевает с повышением эластичности замещения, поскольку в рыночном равновесии компенсируется рыночным перераспределением; модель, по мнению ее автора, подтверждает указанную гипотезу. Мы, однако, используя версию с двумя агентами, показываем несостоятельность выводов [5]: оказывается, что выполнение указанной гипотезы зависит от более точной спецификации функции CES, и гипотеза неверна при принятой в [5] спецификации агрегирующей промежуточные продукты производственной функции типа CES без весов, однако верна для специкации CES с весами.

Однако, указанная функция агрегирования, по сути, представляет собой «черный ящик». Во второй части работы мы используем модель экономического развития с конечным числом агентов, построенную на основе [8], в которой вместо агрегирующей функции используются производственные функции Леонтьева отдельных агентов. Модель позволяет раскрыть динамический смысл понятий слабого звена и нерационального использования ресурсов (misallocation) и показать связь долгосрочных темпов роста со слабыми звеньями.

Модель применяется для анализа процессов агломерации и деагломерации (диффузии). Предполагается наличие двух типов агентов: «стационарных» – связанных постоянно с определенными местоположениями – и «свободных» – способных менять местоположение и, соответственно, переключать свою производственную функцию на взаимодействие со стационарными агентами в новом местоположении. Асимптотическое поведение такой модели может быть исследовано методами идемпотентной (тропической) математики [9]. В работе построена переходная динамика модели с двумя стационарными агентами (находящимися, соответственно, в «центре» и на «периферии») и одним свободным агентом. Последний решает задачу динамической оптимизации и, в соответствии с решением, может перемещаться в пространстве, а также делать трансферты стационарному агенту в текущем местоположении. Показано, что динамика модели соответствует тенденциям процессов агломерации и деагломерации (диффузии) [3].

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00878а).

Список литературы

1. Banerjee A.V., Moll B. 2010. Why does misallocation persist? *American Economic Journal: Macroeconomics,* 2(1), 189-206.
2. Fujita M., Thisse J.-F. 2002. Economics of agglomeration. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Henderson J.V., 2010. Cities and development. *Journal of Regional Science*, 50(1), 515-540.
4. Hsieh C.-T., Klenow P.J. 2009. Misallocation and manufacturing TFP in China and India. *Quarterly Journal of Economics,* 124(4), 1403-1448.
5. Jones C. 2011a. Intermediate goods and weak links in the theory of economic development. *American Economic Journal: Macroeconomics,* 3(1), 1-28.
6. Jones C. 2011b. Misallocation, economic growth and input-output economies. Working Paper 16742. NBER Working Paper Series. Cambridge, NBER.
7. Lucas R. J. 1988. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics,* 22, 3-42.
8. Matveenko V. 1995. Development with positive externalities: the case of the Russian economy. *Journal of Policy Modeling,* 17(3), 207-221.
9. Matveenko V. 2012. Powers of matrices with an idempotent operation and an application to dynamics of spatial agglomerations. In: G. Litvinov et al. (Eds.) Tropical and idempotent mathematics. Moscow: French-Russian Laboratory “J.-V. Poncelet”, 149-155.

К исследованию человеческого капитала и его устаревания

Е.Ю. Можжерина

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

В данной работе рассматривается вопрос устаревания человеческого капитала. В условиях постоянного развития технологий человек должен постоянно вкладывать средства в свое образование, поддерживать актуальность своих знаний, если хочет оставаться востребованным на рынке рабочей силы. При исследовании данного вопроса удобно когорты населения рассматривать по аналогии с производственными мощностями как человеческий капитал, распределенный по возрасту. Такой метод моделирования населения часто встречается в исследованиях последних лет по экономической демографии [1].

За основу в данной работе была взята классическая модель пересекающихся поколений Самуэльсона[2] и Даймонда[3] с дискретным временем. Модель пересекающихся поколений позволяет учесть тот факт, что характер потребительского поведения индивида и профессиональные компетенции существенно зависят от стадии жизненного цикла. Время жизни индивида в данной модели поделено не на два, как в классической модели, а на четыре периода. Это расширение позволяет нам ввести понятие квалификации индивида, опыта работы на мощности определенного возраста. В первый период жизни человек учится, увеличивает свой индивидуальный человеческий капитал за счет средств старших поколений. Он только потребляет, ничего не накапливая. Во втором периоде он зарабатывает, получает опыт работы на новом для себя оборудовании. В третьем периоде индивид работает, тратит деньги на потребление, накопление и воспитание детей. В последнем периоде индивид тратит на собственное потребление то, что заработал в предыдущие периоды.

В третьем периоде нашей модели у индивида есть выбор: остаться на том же производстве, увеличивая мастерство работы на уже устаревающем оборудовании, или уйти на более новую производственную мощность. В работе [4] поднимается вопрос о соотношении ценности опыта работы на старых мощностях и ценности обновления производственных единиц. Данная модель позволяет оценить поведение индивидов и всей системы при разных соотношениях этих ценностей. Например, чтобы укомплектовать штат на устаревающих мощностях, работодатели вынуждены платить на них более высокую начальную зарплату, которая компенсирует меньшее оставшееся время жизни мощностей и меньшую будущую ценность опыта работы на этих мощностях.

Также в данной модели, в отличие от классической, есть альтруистические связи между поколениями: в модели можно учитывать, какую долю средств индивид тратит на воспитание детей, то есть на увеличение человеческого капитала потомства, и как это влияет на развитие всей системы.

Список литературы

1. *Boucekkine R., De la Croix D., Licandro O.* Vintage capital growth theory: Three reakthroughs // Unitat de Fonaments de l'Anàlisi Econòmica (UAB) and Institut d'Anàlisi Econòmica (CSIC), 2011 - UFAE and IAE Working Papers 875.11

2. *Samuelson P.* An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money // Journal of Political Economy, 1958, Vol. 66

3. *Diamond P.* National Debt in a Neoclassical Growth Model // American Economic Review, 1965, Vol. 55

4. *Kredler M.* Experience vs. Obsolescence: A Vintage-Human-Capital Model // University Library of Munich, Germany, 2009 - MPRA Paper 10200

О функционировании производства в условиях нестабильного спроса*

Н.К. Обросова, А.А. Шананин

ВЦ РАН, МФТИ (ГУ), Москва, Россия

Одной из основных проблем российской экономики является модернизация обрабатывающего сектора. Предприятия сектора сформировались в условиях закрытой плановой экономики и регулируемых цен. Их технологическая отсталость привела к низкой конкурентоспособности выпускаемой продукции по сравнению с более качественными импортными аналогами. Поэтому с начала 90-х годов обрабатывающий сектор функционирует в условиях жесткой конкуренции с импортом. В результате в отрасли возникли задержки в реализации продукции, дефицит оборотных средств и неэффективное распределение ресурсов. Производители вынуждены авансировать производственные затраты в условиях, когда математическое ожидание времени реализации продукции сравнимо с его среднеквадратичным уклонением. В период до инфляции начала 90-х годов государство пыталось стимулировать производство сектора с помощью льготных кредитов, что порождало неэффективность в распределении материальных ресурсов. Период высокой инфляции характеризовался дефицитом денежной массы, что привело к развитию не денежных форм расчетов между производителями. В отрасли возникли неплатежи, которые представляли собой своеобразную форму товарных кредитов производству в рамках сформировавшихся финансово-промышленных групп (ФПГ) (см. [1,2]). После кризиса 1998 г. неплатежи исчезли, однако производители обрабатывающего сектора в условиях нестабильной реализации продукции продолжали авансировать производственные затраты за счет двух типов кредитов: долгосрочного и краткосрочного. Рынок долгосрочных кредитов являлся сегментированным. Кредиты на длительный срок выдавались внутри сложившихся ранее ФПГ и зачастую под льготные проценты. Краткосрочные кредиты были более доступны и выдавались производителям на конкурентной основе. При этом во всех ситуациях производство в обрабатывающем секторе оказывалось недогруженным и функционировало в условиях неэффективного распределения ресурсов. В начале XXI века сегментированный рынок кредитов разрушился, и пополнение оборотных средств производства стало происходить только за счет краткосрочных кредитов, выдаваемых на конкурентной основе. Однако это не привело к повышению эффективности производства. Причиной этого является неразвитость торговой инфраструктуры, которая приводит к возникновению ограничения на максимально возможный объем реализуемой партии товара.

Следует отметить, что похожие проблемы низкой конкурентоспособности продукции на внутреннем рынке возникли в ряде европейских стран (Италия, Испания, Греция, Ирландия, Португалия) в результате создания еврозоны. При создании еврозоны был достигнут компромисс: в обмен на открытие внутреннего рынка для германских товаров страны получали низкие процентные ставки по кредитам. После периода быстрого экономического роста перечисленные государства столкнулись с понижением кредитного рейтинга, ростом процентных ставок по кредитам, снижением стоимости производственных активов. Попав в ловушку высоких процентных ставок эти страны еврозоны лишены традиционного способа выхода из нее за счет девальвации национальной валюты.

Анализ проблем обрабатывающего сектора должен проводиться с учетом описанных выше особенностей его функционирования. В работах [3,4] предложены модели производства в условиях дефицита оборотных средств и нестабильности реализации продукции, описывающие особенности производства обрабатывающего сектора на этапах, на которых влияние торговой инфраструктуры можно было считать несущественным, а неэффективность в основном объяснялась сегментированностью рынка кредитов. В данной работе предложена простейшая модель, позволяющая учесть влияние процентных ставок и торговой инфраструктуры на оценку стоимости производства, выпускающего низко конкурентоспособную продукцию.

Рассмотрим производство, имеющее себестоимость единицы продукта y при цене p и мощность η. В условиях нестабильного спроса реализация продукции происходит в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток с параметром λ. Предположим, что торговая инфраструктура

* Работа выполнена при поддержке РФФИ N11-07-00162, ПФИ ОМН РАН N3, проект 3.14, ПФИ Президиума РАН N15, проект N106

накладывает ограничение Y^* на размер единовременно реализуемой продукции. Будем считать, что доход от реализации продукции выводится из оборота, а производственная деятельность авансируется за счет краткосрочной кредитной линии $K(t)$ под процент r в течение выбранного собственником периода времени τ, далее при отсутствии реализации производство останавливается до момента прихода покупателя. Таким образом, $K(t) = y\eta\theta(\tau - t)$, выпуск $Y(t) = Y_0 + \eta \min(t, \tau)$, а ссудная задолженность $L(t) = L_0 e^{rt} + \frac{y\eta}{r}\left(e^{rt} - e^{r(t-\tau)_+}\right)$.

Будем считать, что коэффициент дисконтирования доходов собственника производства равен проценту по краткосрочному кредиту r. Рассмотрим задачу о максимизации математического ожидания дисконтированного дохода. Обозначим через $\omega(Y_0, L_0)$ рыночную стоимость компании, имеющей запас товара Y_0 и ссудную задолженность L_0. Функция $\omega(Y_0, L_0)$ удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\omega(Y_0, L_0) = \sup_{\tau \ge 0} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda + r)t} \max_{0 \le z \le \min\left(pY(t),\, pY^*,\, L(t)\right)} \left[p \min\left(Y(t), Y^*\right) - z + \omega\left(\left(Y(t) - Y^*\right)_+, L(t) - z\right)\right] dt. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет частное решение $\omega(Y_0, L_0) = W(Y_0) - L_0$, где функция $W(Y_0)$ - рыночная оценка стоимости компании в условиях отсутствия долга, являющаяся решением уравнения Беллмана

$$W(Y_0) = \sup_{\tau \ge 0} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda + r)t} \left[p \min\left(Y(t), Y^*\right) - \frac{y\eta}{r}\left(e^{rt} - e^{r(t-\tau)_+}\right) + W\left(\left(Y(t) - Y^*\right)_+\right)\right] dt \qquad (2)$$

Рисунок 1

Таким образом, оценка стоимости компании $W(Y_0)$ служит обеспечением кредитной задолженности. Решение уравнения (2) позволяет проанализировать влияние параметров экономической конъюнктуры на рыночную оценку стоимости производства.

Пусть выполнено условие рентабельности производства $p - y\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) > 0$.

Для уравнения (2) доказано существование решения в классе непрерывных, вогнутых, монотонно неубывающих функций, имеющих производные из отрезка $[0, p]$ (см. [5]). Решение уравнения Беллмана найдено в явном виде с помощью метода шагов. Доказана эргодичность случайного процесса, описывающего запас нереализованной продукции на складе. Найдено финальное распределение вероятностей данного случайного процесса. На основе финального распределения вероятностей получены выражения для средней загрузки производственных мощностей, запаса нереализованной продукции и оценки рыночной стоимости производства. Предложена методика идентификации модели по следующим наблюдаемым величинам: процентная ставка по краткосрочным кредитам, средняя загрузка мощностей, оборачиваемость товарных запасов, рентабельность производства. Зная входные параметры, из системы уравнений модели можно найти отношение оценки стоимости компании к величине оборотных фондов, которое является характеристикой, определяющей кредитные риски. Модель была идентифицирована по данным итальянской компании Fiat (Консолидированная финансовая

отчетность группы Fiat за 2011г., Eurostat, Bloomberg): процентная ставка 6-7%, средняя загрузка мощностей около 70%, оборачиваемость товарных запасов 18%, рентабельность производства 2,5%. На рис.1 представлена зависимость оценки стоимости компании (отношение стоимости компании к величине оборотных фондов) от процентной ставки. Таким образом, возникает «ловушка». Изменение процентной ставки приводит к значительному изменению оценки рыночной стоимости компании и порождает снижение обеспечения заимствований, что вызывает ухудшение рейтинга и дальнейший рост процентной ставки.

Список литературы

1. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* От Госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. The Edwin Mellen Press, Lewiston-Queenston-Lampeter, 1999.

2. *Автухович Э.В., Бурова Н.К., Дорин Б.Л., Панов С.С., Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Ташлицкая Я.М., Чуканов С.В., Шананин А.А., Шапошник Д.В.* Оценка потенциала роста экономики России с помощью математической модели. М.: ВЦ РАН, 2000, 155с.

3. *Автухович Э.В., Шананин А.А.* Отрасль производства в условиях дефицита оборотных средств. // Математическое моделирование, 2000, Т.12, №7, с.102-126.

4. *Акпарова А.В., Шананин А.А.* Модель производства в условиях несовершенной кредитной системы и нестабильной реализации продукции. // Математическое моделирование, 2005, Т.17, №9, с.60-76.

5. *Обросова Н.К., Шананин А.А.* Модель производства в условиях нестабильного спроса с учетом влияния торговой инфраструктуры//Доклады Академии наук. 2013. Т. 450, № 1 (в печати)

Модель многоотраслевой монополистической конкуренции*

И.Г. Поспелов, С.А. Радионов

ВЦ РАН, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

Рассматривается естественное обобщение модели монополистической конкуренции Диксита-Стиглица, впервые описанной в [1] и получившей свое дальнейшее развитие в [2-4]. Предполагается, что существует континуум отраслей, каждая из которых характеризуется параметром $\rho \in (0,1)$. Эластичность замещения между продуктами одной отрасли равна $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$, то есть в отраслях с низким ρ эластичность замещения низкая, и товары могут быть интерпретированы как «информационные», а отрасли с высоким ρ производят товары с высокой эластичностью замещения, которые можно интерпретировать как «материальные». Наша цель состоит в том, чтобы проанализировать взаимодействие «информационных» и «материальных» отраслей.

Предполагается, что в экономике имеется один (агрегированный) потребитель, предпочтения которого на продукцию каждой фиксированной индустрии задаются CES-функцией, как в [1], а предпочтения по всем имеющимся в экономике товарам представляют собой свертку CES-функций по всем индустриям. Найден широкий класс сверток, при которых задача потребителя имеет решение, и доказано, что для любого конечного параметра ν, характеризующего свертку, решение неэффективно, однако для $\nu = -\infty$, когда свертка представляет собой минимум полезностей по индустриям, решение задачи потребителя эффективно.

Исследуются эффекты экономического роста и увеличения численности населения. Показано, что при экономическом росте, который моделируется уменьшением переменных издержек фирмы (рост производительности труда) и увеличением ее постоянных издержек (рост капитальных затрат) производство перемещается из «материальных» в «информационные» отрасли - эффект, который наблюдается в экономике в последние десятилетия. Также показано, что при количественном росте населения производство, наоборот, переходит в «материальные» отрасли.

Список литературы

1. Dixit A. and Stiglitz J. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review. 1977. V. 67, № 3. C. 297-308.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 12-01-31333, 12-01-31189. Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 году.

2. Krugman P. Increasing returns, monopolistic competition, and international trade // Journal of International Economics. 1979. V. 9 № 4. C. 469-479.

3. Krugman P. Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade // American Economic Review. 1980. V. 70 № 5. C. 950-959.

4. Melitz M. The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity // Econometrica. 2003. V. 71 № 6. C. 1695-1725.

Задача оптимального управления рекламными затратами в нечеткой постановке

А.Г. Соломаха

Тверской госуниверситет, Тверь, Россия

Работа является дальнейшим развитием идей, изложенных в [1, 2]. Рассмотрим франчайзинговую систему, состоящую из франчайзера и совокупности франчайзи, с которыми он заключает договор франшизы. Положим, что затраты франчайзера на рекламу уже учтены в договоре франшизы, а значения параметров предлагаемой модели получены с учетом этих затрат.

В интересах определения оптимальных рекламных затрат каждого из франчайзи выберем критерий – прибыль франчайзи с учетом дисконтирования за промежуток времени $[0,T]$ действия договора франшизы, который имеет следующий вид [1]:

$$G=\int_0^T\left[x(t)-u(t)\right]\exp\left[-\rho\cdot t\right]dt\to\max_u, \qquad (1)$$

где ρ - коэффициент дисконтирования, $x(t)$ - функция прибыли франчайзи без учета рекламных затрат, $u(t)$ - функция его расходов на рекламу, а начальное значение $x(0)=x_0$.

Пусть без рекламы изменение прибыли происходит в соответствии с выражением

$$\frac{dx}{dt}=w-\nu\cdot x(t),$$

где w и ν - положительные константы, ν - коэффициент экспоненциального убывания прибыли без рекламы в пределе к значению $w\nu^{-1}$.

Использование рекламы приводит к добавлению к правой части слагаемого, которое, учитывая убывание предельного эффекта от рекламы с ростом рекламных затрат, допускает приближение экспоненциальной функцией вида

$$\gamma\cdot(1-e^{-qu(t)}), \qquad (2)$$

где γ,q - положительные коэффициенты. Тогда с учетом рекламы изменение прибыли происходит в соответствии с выражением

$$\frac{dx}{dt}=w-\nu\cdot x(t)+\gamma\cdot(1-e^{-qu(t)}), \qquad (3)$$

причем $u(t)\geq 0$. Оптимальные рекламные расходы франчайзи получим, решая данную задачу оптимального управления с использованием принципа максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона этой задачи имеет вид

$$H(x(t),u(t),\psi(t),t)=(x-u)e^{-\rho t}+\psi(t)\cdot\left[w-\nu\cdot x(t)+\gamma\cdot(1-e^{-qu(t)})\right] \qquad (4)$$

Запишем сопряженное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-e^{-\rho t}+\nu\cdot\psi(t) \qquad (5)$$

с конечным условием

$$p(T)=0. \qquad (6)$$

В результате решения уравнения (5) с учетом (6) получаем

$$\psi(t)=\frac{1}{\rho+\nu}\left(e^{-\rho t}-e^{\nu t}\cdot e^{-T(\rho+\nu)}\right). \qquad (7)$$

Оптимальное управление $u(t)$ ищем, максимизируя функцию Гамильтона по u. Подставляя (7) в (4) получим, что оптимальные затраты на рекламу определяются выражением

$$u^*(t) = \frac{1}{q}\left\{\ln\left[\gamma q\left(1 - e^{-(\rho+\nu)(T-t)}\right)\right] - \ln(\rho+\nu)\right\}$$

при $t < t_0$ и $u^*(t) = 0$ при $t \geq t_0$, где пороговое значение

$$t_0 = T + \left[\frac{1}{\rho+\nu}\ln\left((1 - \frac{\rho+\nu}{\gamma q}\right)\right].$$

При этом функция $u^*(t)$ убывает на $[0, t_0]$, а при $t \geq t_0$, учитывая приближение момента окончания срока действия договора франшизы, франчайзи надо исключить рекламные затраты.

Найденной функции рекламных затрат $u^*(t)$ соответствует функция прибыли франчайзи $x^*(t)$, которая находится численным интегрированием дифференциального уравнения, получаемого путем подстановки $u^*(t)$ в (3).

На практике коэффициенты экспоненциальной функции (2) γ и q неизвестны, поэтому приведенный подход к нахождению функции рекламных затрат требует уточнения. Рассмотрим решаемую задачу в нечеткой постановке. Каждая экспоненциальная функция вида (2) определяется вектором $\bar{z} = (\gamma, q)$, и пусть выбрана совокупность из I возможных функций $\{\bar{z}_i\}$ указанного вида. Функция принадлежности для этих функций вида (2) синтезируется экспертным путем. При этом N экспертам предлагается оценить, может ли функция (2) иметь вид $\bar{z}_i = (\gamma_i, q_i)$ для каждого i из указанной совокупности. Тогда в качестве значения функции принадлежности для набора $\bar{z}_i = (\gamma_i, q_i)$ выбирается $\mu(\bar{z}_i) = \frac{N_i}{N}$, где N_i - число экспертов из опрошенных, полагающих, что функция (2) может иметь вид $\bar{z}_i = (\gamma_i, q_i)$.

Для каждого набора $\bar{z}_i = (\gamma_i, q_i)$ по приведенной выше схеме находим рекламные затраты $u^*_i(t)$ и соответствующее значение $G_i = G(u_i^*(t, \bar{z}_i))$ суммарной прибыли франчайзи по выражению (1). Тогда в соответствии с подходом Беллмана-Заде окончательно функция рекламных затрат франчайзи $u^*(t)$ выбирается равной $u^*_i(t)$ для i, на котором достигается внешний максимум в выражении

$$\max_{1\leq i\leq I}\min\left\{\frac{G(u_i^*(t,\bar{z}_i))}{\max\limits_{1\leq j\leq I} G(u_j^*(t,\bar{z}_j))}; \mu(\bar{z}_i)\right\}.$$

Эта максиминная задача эквивалентна оптимизационной задаче

$$\Lambda \to \max$$

при ограничениях

$$\left\{\frac{G(u_i^*(t,\bar{z}_i))}{\max\limits_{1\leq j\leq I} G(u_j^*(t,\bar{z}_j))} \geq \Lambda\right\}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\mu(\bar{z}_i) \geq \Lambda,\ 1 \leq i \leq I,$$

решение которой может быть найдено, например, методом множителей Лагранжа.

Список литературы

1. *Рудашевский В.Д., Фурщик М.А.* Оптимальная стратегия развития франчайзинговой системы // Экономика и математические методы. 1998. Т.34, вып. 2. С. 89-104. 2.Соломаха А.Г. Методы определения характеристик франчайзинговой системы // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Третья Российская школа-конференция для молодых ученых. Тезисы докладов. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. С. 58.

Разрушение простых асимптотик в моделях оптимальной экономической динамики (численные исследования)*.

Чуканов С.В.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницина РАН, Москва, Россия.

Гипотеза рационального поведения, лежащая в основе доминирующей на сегодняшний день неоклассической парадигмы экономической теории, приводит к разнообразным оптимизационным, игровым и равновесным конструкциям. Динамические аспекты экономической теории формализуются в виде задач оптимального управления и их обобщений. В 60-80е годы прошлого столетия интенсивно разрабатывалась магистральная теория [1], обосновывающая сходимость (в том или ином смысле) оптимальных траекторий к (квази)стационарному решению гамильтоновых уравнений. В содержательном плане результаты этой теории предлагали простое и ясное представление о «планомерном и пропорциональном» развитии экономики, в вычислительном – давали хорошее начальное приближение для численных методов. В приложениях магистральные свойства обеспечивали некие гарантии от осложнений, связанных с появлением «фазовых» точек на оптимальных траекториях. Позднее было обнаружено, что по мере роста коэффициента дисконтирования в результате бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности магистрали (стационарного режима) может появиться периодический режим, который принимает на себя роль аттрактора оптимальных траекторий [2]. Более того в работе [3] доказано, что при асимптотически большом дисконтировании в качестве системы оптимального синтеза может оказаться практически любая динамическая система, и тем самым сколь угодно сложная динамика вплоть до хаотической. Вопросы исследования сценария развития динамической сложности, в том числе анализа бифуркаций следующих за первой, до сих пор остаются открытыми. Проблема в том, что для перехода к динамической системе (оптимального синтеза) нужно уметь решать уравнение Беллмана.

В рамках, исследований проводившихся в ВЦ РАН, в ряде прикладных моделей наблюдалась потеря устойчивости магистрали, причем уже по мере приближения к границе устойчивости отмечалось появления многочастотных слабозатухающих колебаний, существенное усложнение решений и резкое увеличение трудоемкости вычислений. Эти факты стали поводом для настоящего исследования. Для анализа развития динамической сложности был предложен паллиативный подход, основанный на построении и исследовании достаточно богатого параметрического семейства задач, в которых решение уравнения Беллмана заведомо известно. Для численных экспериментов разработан и реализован в среде Maple комплекс программ, объединяющий прикладные методики современной теории динамических систем. В него с небольшими модификациями вошли стандартные методы расчета ляпуновских показателей (алгоритм Бенеттина) и вычисления корреляционной размерности аттракторов (алгоритм Грассбергера-Прокаччиа), процедуры расчета спектральных характеристик динамических переменных и визуализации (естественных) инвариантных мер на аттракторе. Дееспособность и точность алгоритмов проверялась расчетами и сопоставлениями с известными результатами для эталонной системы Лоренца. В докладе предполагается привести и обсудить некоторые результаты расчетов для динамических систем оптимального синтеза, построенных по указанной схеме.

Список литературы.

1. *McKenzie L.W.* Optimal Economic Growth and Turnpike Theorems. Handbooks of Mathematical Economics. Eds. K.J.Arrow, M.D.Intriligator. Amsterdam etc.: North-Holland, 1986, v.3. . P.1282-1355

2. *Benhabib, J. and K. Nishimura* The Hopf Bifurcation and the Existenceand Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth. // Journal of Economic Theory,1979, 21, . P.421-444.

3. *Boldrin, M. and L. Montrucchio* On the indeterminacy of capital accumulation paths. // Journal of Economic Theory, 1986, 40: P.26-39.

* Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 15, проект 106 и ОМН РАН № 3, проект 3.14.

Исследование операций в военном деле

1. *М.В. Прудский* Модель локальных конфликтов 94

Модель локальных конфликтов*

М.В. Прудский

Пермский государственный национально-исследовательский университет, Пермь, Россия

Война занимает очень важное место не только в жизни отдельного государства на карте мира, но и в судьбе всего мира в целом. Несмотря на, казалось бы, наступление эпохи цивилизованности, эпохи информационных технологий и вычислительной техники, на карте земного шара постоянно вспыхивают различного рода военные конфликты.

Они могут затрагивать судьбы не только непосредственных участников, но также и тех государств, которые, находясь в стороне, имеют дипломатические, экономические, военные и иные тактические или стратегические интересы на данной территории.

Некоторые страны имеют в регионах военные базы, другие страны поставляют участникам оружие, компании третьих стран здесь ведут бизнес или же, например, наоборот – требуется устранить конкурентов, по возможности, чужими руками.

Чтобы действовать эффективно в условиях конфликта, а именно извлекать из него максимальную для себя выгоду, либо терпеть минимальные потери, а также иметь информацию – стоит ли вообще ввязываться в конфликт, если есть возможность этого не делать, необходимо уметь предсказывать его результаты.

Прогнозирование всего, что связано с военными действиями, достаточно затруднено в силу наличия такого фактора, как неопределённость, причём в значительной мере.

Неопределённость связана с тем, что как непосредственно во время военных действий, так и в мирное время, в период дипломатических отношений число детерминант, влияющих на действия игроков очень велико – буквально каждая мелочь, начиная от курса национальной валюты, заканчивая утренним настроением её правителя, может повлиять на отношения между странами. Решение, начать ли войну, закончить ли её, с кем в какие союзы вступать и на каких условиях может влиять на последующие подобные решения, как государства, принимающего их, так и остальных государств, в отношении которых принимается решение, либо государств-наблюдателей.

Если война явно движима экономическими интересами, как правило, это означает борьбу за ресурсы. Конкуренция за ресурсы является естественным явлением для человечества и вообще для всех живых существ в природе. Она является одной из движущих сил естественного отбора и всеобщего развития.

Для определения возможных действий участников на основании их интересов была создана имитационная модель локальных конфликтов.

Модель принадлежит к разряду гибридных, сочетая в себе признаки агентного и системного подхода. Каждое государство в модели локальных конфликтов является агентом, взаимодействующим с другими государствами по определённым правилам, задаваемым начальными условиями модели. В то же время государство рассматривается в качестве экономической системы.

Государства взаимодействуют друг с другом, осуществляют внешнюю, экономическую и военную политику в отношении своих соседей.

Каждое государство обладает определённым набором характеристик, которые определяют приоритеты его политики, его возможности, а также вес на региональной арене. В модели каждая характеристика представлена в агрегированной форме, в качестве фонда, который в процессе функционирования модели либо потребляется, либо распадается на множество других фондов: 1) производственные фонды, 2) богатство (валовый продукт), 3) фонд потребления, 4) фонд накопления, 5) армейский фонд, 6) армейский фонд потребления, 7) фонд развития, 8) армия, 9) инвестиционный фонд.

Квинтэссенция всех механизмов модели – это функция агрессивности. Именно она определяет причины и характер всех отношений между государствами.

Это функция, принимающая значения от 0 до 1 и характеризующая агрессивность одного государства по отношению к другому.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ЗАО «ПРОГНОЗ».

Совокупность функций агрессивности образует матрицу агрессивности, у которой на главной диагонали стоят нули. Матрица используется для расчётов отношений между государствами.

Играя с начальными параметрами можно моделировать различное множество конфликтов, в том числе те, которые существовали в прошлом, имеют возможность проявиться в будущем и даже те, существование которых по тем или иным причинам невозможно. Последнее предоставляет богатые возможности для использования моделей при разработке искусственного интеллекта для стратегических компьютерных игр. В случае должной оптимизации процесса вычислений, модель позволит создать адекватно мыслящий искусственный интеллект, способный не вызывать у игроков претензии к своей чрезмерной жестокости или, наоборот, излишнему пацифизму.

Список литературы

1. *Сунь Цзы.* Искусство войны. М.: Изд-во «София», 2010. 224 с.

2. *Снетков Н.Н.* Имитационное моделирование экономических процессов: Учебно-практ. пос. М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008. 228 с.

3. *Даян М., Тевет Ш.* Арабо-израильские войны 1956, 1967. М.: Изд-во «Эксмо», 2003. 496 с.

4. *Самсонов А.М.* Сталинградская битва. 4-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1989. 386 с.

5. *Ло Гуань-Чжун* Троецарствие. М.: ГИХЛ, 1954. 1584 с.

6. *Либерти Дж.* Программирование на C\#. М.: Изд-во «Символ-Плюс», 2003. 688 с.

7. *Бушков А.* Неизвестная война. Тайная история США. М.: ОЛМА Медиа Групп, 2008. 576 с.

Исследование операций в банковском деле и на финансовых рынках

1. *Г.А. Агасандян* Генераторы базисов для многомерных рынков опционов и CC-VaR 96
2. *Г.А. Агасандян* Комбинированные рынки опционов и CC-VaR 98
3. *Г.А. Агасандян* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках 101
4. *О.Б. Байрамов* Задачи оперативного управления коалицией заёмщиков 101
5. *А.Е. Бондаренко, Л.Г. Егорова, Г.И. Пеникас* Агентно-ориентированное моделирование поведения биржи 103
6. *И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко* Неопределённые факторы в организации коалиции заёмщиков 104
7. *И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко, А.Н. Сытов* Анализ принятия решений в моделях кредитных организаций 106
8. *А.Ф. Ерешко, А.М. Аникин* Исследование операций в автоматизированном трейдинге 106
9. *А.Ф. Ерешко, А.Н. Сытов* Вычислительные эксперименты с управлением коалицией заемщиков 109
10. *А.Ф. Кононенко, В.В. Шевченко* О построении производственно-финансовых моделей функционирования многоуровневых корпораций 110
11. *И.М. Промахина* Оценка потенциалов развития рынков ИЖК европейских стран 112
12. *А.Н. Сытов* Модели коалиции заемщиков с механизмом выдачи кредитов на основе жребия 114

Генераторы базисов для многомерных рынков опционов и CC-VaR

Г.А. Агасандян

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

Континуальный критерий VaR (CC-VaR) требует построения из имеющихся на рынке инструментов такого портфеля, чтобы порождаемый им доход q удовлетворял неравенствам $\mathrm{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0,1]$ ($\mathrm{P}\{S\}$ – вероятность множества S в соответствии с прогнозом инвестора). Подробное исследование применения CC-VaR на опционных рынках, включая многомерные, можно найти в [1-3,5]. Монотонно возрастающая и непрерывная функция $\phi(\varepsilon)$ задается инвестором и определяет его рисковые предпочтения. Там же предлагается алгоритм оптимизации портфеля, основанный на анализе функции относительных доходов с использованием процедуры Неймана-Пирсона из статистики [4]. Оптимальный портфель инвестора строится в базисе из простейших баттерфляев опционного рынка.

В случае многомерного рынка так называемых α-опционов большое значение при построении портфелей, оптимальных по континуальному критерию VaR, приобретает выбор состава базиса, для чего используются подходящие одномерные генераторы. Однако во многом этот метод носит ручной характер. Понятно, что в силу громоздкости возникающих конструкций имеет смысл находить такие базисы в автоматическом режиме. Предлагается общий подход к их конструированию. Для этого требуется унификация обозначений. Сначала формулируются правила, по которым конструируются базисы, а затем результаты переносятся на рынки опционов разной размерности, как для однотипных базисов α-опционов, так и в случае смешанного базиса при наличии единственного центра рынка.

В целях унификации обозначений для обычных одномерных опционов колл и пут со страйком ς используются специально индексированные символы с привычными платежными функциями соответственно

$$\mathbf{O}_{\varsigma}^{+}, \mathbf{O}_{\varsigma}^{-}, \quad \pi\left(x;\mathbf{O}_{\varsigma}^{+}\right) \equiv \max\left(0, x-\varsigma\right) \equiv \left(x-\varsigma\right)^{+}, \quad \pi\left(x;\mathbf{O}_{\varsigma}^{-}\right) \equiv \max\left(0, \varsigma-x\right) \equiv \left(\varsigma-x\right)^{+}.$$

Для различения опционов по разным измерениям их обозначения дополнительно снабжаются номером координаты:

$$\mathbf{O}_{l;\varsigma}^{+}, \mathbf{O}_{l;\varsigma}^{-}, \quad l = 1..n.$$

При построении базисов используется полный перебор по всем возможным типам страйков, соответствующим типам базисных инструментов, с использованием троичной системы их кодирования для однотипного варианта задачи и пятеричной – для смешанного.

В основе всех последующих построений лежат *одномерные простейшие нормированные баттерфляи*. Для крайних страйков $\varsigma = 1,\nu$ существуют по два типа усеченных баттерфляев – спрэдов; это

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{U} - \left(\mathbf{O}_1^+ - \mathbf{O}_2^+\right)/h = \left(\mathbf{O}_2^- - \mathbf{O}_1^-\right)/h\,,\ \ \mathbf{B}_\nu = \left(\mathbf{O}_{\nu-1}^+ - \mathbf{O}_\nu^+\right)/h = \mathbf{U} - \left(\mathbf{O}_\nu^- - \mathbf{O}_{\nu-1}^-\right)/h\,.$$

Для страйков $\varsigma = 2..\nu–1$ существуют два однотипных баттерфляя

$$\mathbf{B}_\varsigma = \left(\mathbf{O}_{\varsigma-1}^+ - 2\mathbf{O}_\varsigma^+ + \mathbf{O}_{\varsigma+1}^+\right)/h = \left(\mathbf{O}_{\varsigma-1}^- - 2\mathbf{O}_\varsigma^- + \mathbf{O}_{\varsigma+1}^-\right)/h$$

и один *естественный* тип смешанного баттерфляя

$$\mathbf{B}_\varsigma = \mathbf{U} - \left(\mathbf{O}_\varsigma^- - \mathbf{O}_{\varsigma-1}^-\right)/h - \left(\mathbf{O}_\varsigma^+ - \mathbf{O}_{\varsigma+1}^+\right)/h\,.$$

В наших конструкциях в смешанном представлении мы ограничиваемся именно естественными представлениями. Под этим понимается следующее свойство, связанное с котировками страйков на реальных рынках.

При построении естественного смешанного базиса из баттерфляев на одномерном рынке выделяется *центр рынка* – некоторый внутренний страйк. (В условиях реального рынка его следовало бы выбирать вблизи текущей цены базового актива.)

Мы говорим, что базисный баттерфляй имеет *естественное* происхождение (и представление), когда он образован двумя пут-спрэдами (одним пут-спрэдом для усеченного баттерфляя), если его (срединный) страйк расположен левее центра, двумя колл-спрэдами (одним колл-спрэдом для усеченного баттерфляя), если – правее, и комбинацией левого пут-спрэда и правого колл-спрэда, если – совпадает с центром. Напомним, что страйками усеченных баттерфляев (спрэдов) являются крайние (слева и справа) страйки.

Выписываемые ниже соотношения являются одномерными генераторами многомерных базисных инструментов α-рынка, при этом $\varsigma = 2..\nu–1$:

$$\gamma_1^- = \left(\mathbf{O}_2^- - \mathbf{O}_1^-\right)/h\,,\qquad \gamma_1^+ = \mathbf{U} - \left(\mathbf{O}_1^+ - \mathbf{O}_2^+\right)/h\,,\qquad \gamma_\nu^- = \mathbf{U} - \left(\mathbf{O}_\nu^- - \mathbf{O}_{\nu-1}^-\right)/h\,,$$

$$\gamma_\nu^+ = \left(\mathbf{O}_{\nu-1}^+ - \mathbf{O}_\nu^+\right)/h\,,\quad \gamma_\varsigma^- = \left(\mathbf{O}_{\varsigma-1}^- - 2\mathbf{O}_\varsigma^- + \mathbf{O}_{\varsigma+1}^-\right)/h\,,$$

$$\gamma_\varsigma^+ = \left(\mathbf{O}_{\varsigma-1}^+ - 2\mathbf{O}_\varsigma^+ + \mathbf{O}_{\varsigma+1}^+\right)/h\,,\qquad \gamma_\varsigma^m \equiv \mathbf{U} - \left(\mathbf{O}_\varsigma^- - \mathbf{O}_{\varsigma-1}^- + \mathbf{O}_\varsigma^+ - \mathbf{O}_{\varsigma+1}^+\right)/h\,.$$

Здесь последний генератор применяется лишь для центра рынка.

Для n-мерного страйка $\boldsymbol{\varsigma} = \{\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n\}$ применяется генератор n-мерных базисных баттерфляев в форме произведения одномерных генераторов

$$\Gamma\left[\mathbf{B}_{\boldsymbol{\varsigma}}\right] = \prod\nolimits_{i=1..n} \gamma_{i,\varsigma_i}\,,$$

где в качестве одномерных генераторов выбирается какой-либо подходящий генератор из представленного выше перечня в зависимости от типа строящегося базиса. При этом множитель $\boldsymbol{U}$ в произведениях с опционами следует опускать.

Применение n-мерного генератора к каждому n-мерному страйку дает в результате сумму произведений одномерных опционов в разных количествах. Каждое такое слагаемое трансформируется в соответствующий α-опцион, размерность которого может оказаться произвольной, но не превышающей n.

Трудно рассчитывать на получение конечных аналитических формул представления базисных баттерфляев в общем случае – для любых страйков и любой размерности. Такую формулу можно предложить, например, для однотипных полных баттерфляев (т.е. для внутренних страйков). Имеет место

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\varsigma}} = (-1)^n \Big(2^n \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\varsigma}} - 2^{n-1} \sum\nolimits_{i\in N} \sum\nolimits_{\varepsilon_i \in E} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\varsigma}+\varepsilon_i \mathbf{v}_i} +$$

$$+ 2^{n-2} \sum\nolimits_{i,j\in N} \sum\nolimits_{\varepsilon_i,\varepsilon_j \in E} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\varsigma}+\varepsilon_i \mathbf{v}_i+\varepsilon_j \mathbf{v}_j} - \ldots - (-1)^n \sum\nolimits_{\varepsilon_l \in E, l\in N} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\varsigma}+\sum_{l\in N}\varepsilon_l \mathbf{v}_l} \Big) \Big/ \prod\nolimits_{l\in N} h_l\,.$$

Однако для остальных страйков приходится действовать иначе. Поэтому для получения базиса в целом важно создание автоматизированной алгоритмической системы построения базисов произвольной размерности из баттерфляев, как полных, так и усеченных. Сначала рассмотрим построение смешанных представлений базисных баттерфляев. В этом случае замена произвольного слагаемого в разложении генератора производится по правилам

$$\mathbf{O}_{i_1;\varsigma_1}^{\alpha_{i_1}} \mathbf{O}_{i_2;\varsigma_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots \mathbf{O}_{i_k;\varsigma_k}^{\alpha_{i_k}} \to \mathbf{A}_{i_1 i_2 \ldots i_k;\varsigma_1\varsigma_2\ldots\varsigma_k}^{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}}\,,\qquad \left\{i_1, i_2, \ldots i_k\right\} \subset N,\ \ \varsigma_j \in L_{i_j},\ \ j = 1..k,\ \ k \in N\,.$$

В разложении в качестве свободного члена может присутствовать и единичный n-мерный базовый актив $\boldsymbol{U}$.

С помощью такой трансформации для всех n-мерных страйков получаем весь базис. В смешанном базисе в модели с центром рынка всего насчитывается 5^n различных типов базисных инструментов – базисных баттерфляев, включая и усеченных по некоторым координатам. Такое количество вызвано тем, что по каждому измерению различаются пять типов страйков: крайний слева, крайний справа, центр рынка и два внутренних – влево и вправо от центра рынка.

Если веса оптимального по CC-VaR портфеля в базисе из баттерфляев уже найдены, то остается определить платежную функцию оптимального портфеля. Для этого обозначения α-опционов, образующих оптимальный портфель, необходимо трансформировать в платежные функции. Делается это по правилам:

$$\mathbf{A}^{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}}_{i_1 i_2\ldots i_k;\varsigma_1\varsigma_2\ldots\varsigma_k} \to \prod_{j=i_1,i_2,\ldots i_k} \omega_{j,\alpha_j,\varsigma_j}\left(x_j\right), \quad \left\{i_1,i_2,\ldots i_k\right\}\subset N, \quad \varsigma_j\in L_{i_j}, \quad j=1..k, \quad k\in N,$$

$$\omega_{j,\alpha_j,\varsigma_j}\left(x_j\right)=\max\left(0,\alpha_j\left(x_j-\varsigma_j\right)\right), \quad \varsigma_j\in L_j, \quad j\in N; \qquad \mathbf{U}\to 1.$$

Такие правила упрощаются, если ограничиваться однотипными представлениями. Единый для всех опционов (и портфеля в целом) тип фиксируется заранее, и его в обозначениях опционов не указываем. После применения генератора каждое слагаемое в сумме, являясь некоторым произведением опционов, трансформируется в α-опцион по правилам

$$\mathbf{O}_{i_1;\varsigma_1}\mathbf{O}_{i_2;\varsigma_2}\cdots\mathbf{O}_{i_k;\varsigma_k}\to\mathbf{A}_{i_1 i_2\ldots i_k;\varsigma_1\varsigma_2\ldots\varsigma_k}, \quad \left\{i_1,i_2,\ldots i_k\right\}\subset N, \quad \varsigma_j\in L_{i_j}, \quad j=1..k, \quad k\in N.$$

Аналогично переписываются правила трансформации опционов в платежные функции:

$$\mathbf{A}_{i_1 i_2\ldots i_k;\varsigma_1\varsigma_2\ldots\varsigma_k} \to \prod_{j=i_1,i_2,\ldots i_k} \omega_{j,\varsigma_j}\left(x_j\right), \quad \left\{i_1,i_2,\ldots i_k\right\}\subset N, \quad \varsigma_j\in L_{i_j}, \quad j=1..k, \quad k\in N,$$

$$\omega_{j,\varsigma_j}\left(x_j\right)=\max\left(0,\alpha_j\left(x_j-\varsigma_j\right)\right), \quad \varsigma_j\in L_j, \quad j=1..n; \qquad \mathbf{U}\to 1.$$

С помощью такой трансформации для всех n-мерных страйков получаем весь базис. В составе однотипного базиса всего насчитывается 3^n различных типов базисных баттерфляев, включая и усеченных по некоторым координатам, поскольку по каждому измерению теперь следует различать три типа страйков: крайний слева, крайний справа и один внутренний.

Список литературы

1. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.

2. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов //Экономика и математические методы, 2005, т. 41, №4. С. 88-98.

3. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.

4. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. – 948 с.

5. *Agasandian G.A.* Optimal Behavior of an Investor in Option Market // International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). Pp. 1859-1864.

Комбинированные рынки опционов и CC-VaR

Г.А. Агасандян

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

Континуальный критерий VaR (CC-VaR) требует построения из имеющихся на рынке инструментов такого портфеля, чтобы порождаемый им доход q удовлетворял неравенствам $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ для *всех* $\varepsilon\in[0,1]$ ($P\{S\}$ – вероятность множества (события) S в соответствии с прогнозом инвестора). Подробное исследование применения CC-VaR на опционных рынках, включая многомерные, можно найти в [1-3,5]. Монотонно возрастающая и непрерывная функция $\phi(\varepsilon)$ задается инвестором и определяет его рисковые предпочтения. Там же предлагается алгоритм оптимизации портфеля, основанный на анализе функции относительных доходов с использованием процедуры Неймана-Пирсона из статистики [4]. Оптимальный портфель инвестора строится в базисе из простейших баттерфляев опционного рынка.

Содержание настоящей работы связано с интерпретацией доходностей базовых активов, образующих многомерные рынки опционов. Участник рынка строит свое поведение, инвестируя сразу на двух частично увязанных между собой рынках разных размерностей. Один из них – двумерный рынок с двумя

базовыми активами, а другой – одномерный, при этом базовый актив одномерного рынка является одним из базовых активов двумерного. Такой рынок называем *комбинированным* (2,1)-мерным рынком.

Решение ищется в форме комбинации двух портфелей – одного двумерного на первом рынке и другого одномерного – на втором. Решение основывается на использовании расхождения в безрисковых относительных доходах на двух рынках. При этом модификация алгоритма оптимизации учитывает основной финансовый принцип, согласно которому всякий дополнительный риск должен быть адекватно вознагражден.

Предлагается механизм виртуализации двумерного рынка из двух одномерных рынков, позволяющий строить не существующий в реальности двумерный рынок на основе двух существующих одномерных рынков с соблюдением естественно возникающих условий их согласованности. К рассматриваемой задаче применением подобной виртуализации двумерного рынка сводится и другая задача для двух одномерных рынков с взаимонезависимым ценообразованием, что делает ее фактически частным случаем первой. Иллюстративный материал по второй задаче ввиду его схожести с первой здесь не представлен.

Согласование процентных ставок

При рассмотрении теоретических двумерного и двух одномерных рынков используются обозначения X и Y для множеств значений базовых активов $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, при этом ценовая функция и прогнозная плотности обозначаются для двумерного рынка соответственно $c(x, y)$ и $p(x, y)$, для первого одномерного рынка – $c_X(x)$ и $p_X(x)$, для второго – $c_Y(y)$ и $p_Y(y)$.

Плотность $c(x, y)$ является стоимостью δ-инструмента $\boldsymbol{D}(x, y)$ – континуального аналога нормированного простейшего баттерфляя двумерного рынка, $p(x, y)$ – его средний доход. Плотности $c_X(x)$ и $p_X(x)$, $c_Y(y)$ и $p_Y(y)$ – то же самое для δ-инструментов $\boldsymbol{D}_1(x)$ и $\boldsymbol{D}_2(y)$ двух одномерных рынков. Имеют место соотношения

$$\int_{X\times Y} c(x,y)\,dxdy = \theta_{XY}, \quad \int_X c_X(x)\,dx = \theta_X, \quad \int_Y c_Y(y)\,dy = \theta_Y;$$

$$c_1(x) = \int_Y c(x,y)\,dy, \qquad c_2(y) = \int_X c(x,y)\,dx,$$

$$\int_X c_1(x)\,dx = \int_Y c_2(y)\,dy = \int_{X\times Y} c(x,y)\,dxdy = \theta_{XY}.$$

При рассмотрении рынков опционов, как одномерных, так и многомерных (в чистом виде), мы принимали в [1-3,5] без ограничения общности для безрискового относительного дохода за период $r \equiv 1$. Потому и

$\theta_{XY} \equiv 1/r = 1$.

Однако теперь нам приходится такое предположение отвергнуть, поскольку у нас уже не один рынок, и в новых условиях оно становится ограничительным. При совместном рассмотрении двумерного рынка и его одномерных компонентных рынков имеется в виду, что ценообразование на них производится раздельно, как для двумерных инструментов, так и двух одномерных, так как это два самостоятельных, хотя и связанных между собой, рынка.

Плотность $c(x, y)$ является атрибутом лишь собственно двумерного рынка. Предположим, что на координатных одномерных рынках (или на одном из них) сформированы одномерные плотности $c_X(x)$ и $c_Y(y)$, которые при этом не обязаны совпадать с маргинальными для $c(x, y)$ плотностями $c_1(x)$ и $c_2(y)$ соответственно, т.е.

$c_X(x) \neq c_1(x)$ и $c_Y(y) \neq c_2(y)$.

Важно подчеркнуть суть различий между всеми введенными плотностями. Напомним, что плотность $c(x, y)$ является стоимостью двумерного инструмента $\boldsymbol{D}(x, y)$ на двумерном теоретическом рынке с двумя базовыми активами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Плотность $c_1(x)$ является стоимостью двумерного инструмента $\boldsymbol{D}_1(x)\boldsymbol{U}_2$, а $c_2(y)$ – двумерного инструмента $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}_2(y)$ того же двумерного рынка ($\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$ – безрисковые активы двух одномерных рынков с базовыми активами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно).

В отличие от маргинальных плотностей $c_1(x)$ и $c_2(y)$ плотность $c_X(x)$ является стоимостью одномерного инструмента $\boldsymbol{D}_X(x)$ на одномерном рынке с базовым активом $\boldsymbol{X}$, а $c_Y(y)$ – одномерного инструмента $\boldsymbol{D}_Y(y)$ на одномерном рынке с базовым активом $\boldsymbol{Y}$.

Вообще говоря, плотности $c_X(x)$ и $c_Y(y)$ могут быть никак не связаны с плотностями $c_1(x)$ и $c_2(y)$, равно как и параметры θ_X и θ_Y могут быть произвольны. Более того, приводимые в последующем конструкции допускают возможность таким произволом воспользоваться. Однако в теоретическом случае в предположении недопущения арбитража эти характеристики должны удовлетворять условию согласованности. Возникают жесткие взаимосвязи

$c_X(x) \equiv \tau_1 c_1(x)$, $c_Y(y) \equiv \tau_2 c_2(y)$, $\theta_{XY} = \theta_X\theta_Y$.

Для упрощения записи формул и вычислений полагаем

$\theta_{XY} \equiv 1$.

В таком случае остается единственный свободный параметр τ и имеет место

$\theta_X = \tau_1 = \tau, \quad \theta_Y = \tau_2 = \tau^{-1}$.

Правило переключения между рынками и иллюстративные примеры

Использование CC-VaR предполагает анализ относительных доходов для дискретной модели рынка с n страйками по каждой координате. При наличии двух рынков разных размерностей в анализе участвуют относительные доходы для двумерного рынка, его одномерной координатной версии и самостоятельного первого одномерного рынка соответственно

$\rho_{ij} \equiv p_{ij} / c_{ij}, \quad \rho_{1;j} \equiv p_{1;j} / c_{1;j}, \quad \rho_{X;j} \equiv p_{1;j} / c_{X;j}, \quad i,j \in I = \{1,2,\ldots,n\}$.

В терминах этих характеристик основное условие переключения между рынками, одновременно вводящее искомое множество индексов M переключения, можно записать в виде

$\{\forall i \in I: \ \rho_{X;j} > \rho_{ij} \Leftrightarrow \rho_{1;j} > \tau\rho_{ij}\} \Rightarrow i \in M \subset I$.

Идея такого переключения состоит в том, что при выполнении его условия для некоторого фиксированного $i \in I$ предлагаемая замена в портфеле двумерного инструмента $\boldsymbol{D}_{1;i}$ (т.е. $\boldsymbol{D}_{1;i}\boldsymbol{U}_2$) одномерным инструментом $\boldsymbol{D}_{X;i}$ гарантирует сохранение прогнозной вероятности с одновременным увеличением доходности портфеля.

Рассматриваются два примера с $n = 12$.

Пример 1. $c(x, y) = 27/160 - (x+1/2)^2/40 - (y-1/2)^2/40 - (z-1/2)^2/40$,

$p(x, y) = 7/40 - x^2/20 - y^2/20 - z^2/20$.

Пример 2. $c(x, y) = 29/100 - 3(x + y)^2/50, \quad p(x, y) = 3/10 - 3(x - y)^2/40$.

Суть различий в примерах состоит в том, что в первом из них наибольшие относительные доходы возникают в области центра рынка, а во втором – на периферии. Это порождает качественное расхождение в свойствах оптимального решения. Использованием стандартного алгоритма оптимизации совместно с правилом переключения между рынками оптимальные комбинированные портфели находятся для произвольного значения параметра $\tau<1$.

Из рис. 2 видно, что для примера 1 при $\tau > \tau_{cr}$ (≈ 0.93) лучше использовать чисто двумерный портфель (его доходность вообще не зависит от τ), а при $\tau < \tau_{cr}$ – чисто одномерный портфель; для примера 2 при всех тестируемых значениях параметра τ лучшим оказывается комбинированный портфель – его доходность превышает доходность одномерного портфеля.

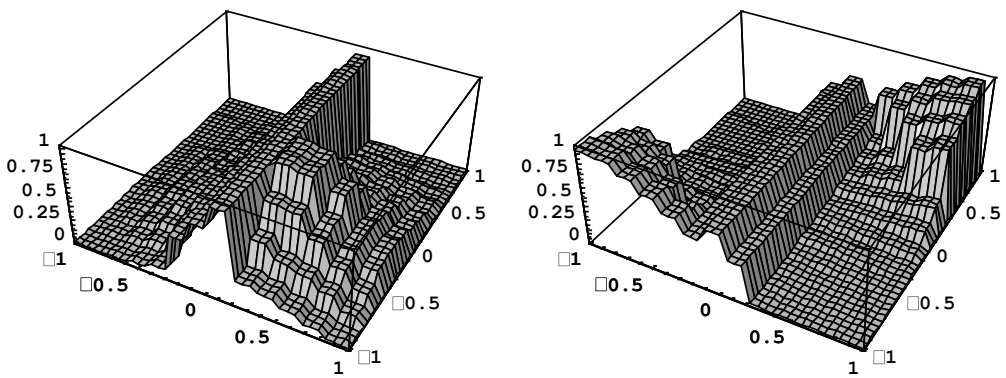


Рис. 1. Доходы комбинированных портфелей для примера 1 при τ = 0.75 (слева) и примера 2 при τ = 0.8 (справа)

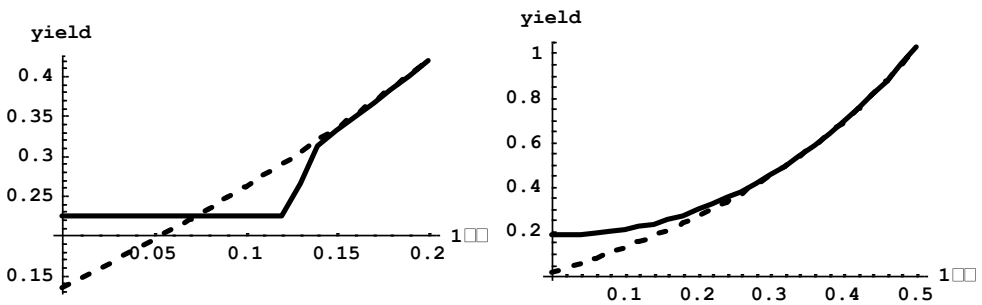


Рис. 2. Доходность одномерного (штриховая линия) и комбинированного (сплошная линия) портфелей (слева – для примера 1, справа – для примера 2)

Список литературы

1. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь (VaR). М.: ВЦ РАН, 2001. 34 с.

2. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов //Экономика и математические методы, 2005, т. 41, №4. С. 88-98.

3. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.

4. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. – 948 с.

5. *Agasandian G.A.* Optimal Behavior of an Investor in Option Market // International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). Pp. 1859-1864.

Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках

Г.А. Агасандян

В докладе на основе функции рисковых предпочтений инвестора вводится континуальный критерий VaR (CC-VaR) и последовательно исследуются проблемы его использования на финансовых рынках.

Этот критерий предписывает инвестору строить портфель, обеспечивающий максимизацию среднего дохода при выполнении континуального множества ограничений на доход снизу, что фактически означает формирование инвестором им самим заранее заданной функции распределения дохода. Приводится процедура Неймана-Пирсона, служащая основой алгоритмов построения оптимальных по этому критерию портфелей, и изучаются ее свойства применительно к задачам с CC-VaR. Исследуются теоретический δ-рынок и его эквивалент – теоретический рынок опционов. Рассматриваются формальные постановки родственных между собой задач, устанавливается сводимость одних задач к другим и дается общее представление их решений. Приводятся и изучаются основные теоретические схемы применения CC-VaR и решаются типовые примеры. Определяется и анализируется корректность семейств функций рисковых предпочтений инвестора. Конструкции и результаты для теоретического континуального рынка адаптируются к сценарному рынку и дискретному по страйкам рынку опционов. Изучается обобщение введенных конструкций на многомерные рынки специальным образом определяемых α-опционов, которые порождаются несколькими базовыми активами. По аналогии с однопериодными многомерными опционами исследуются одномерные многопериодные α-опционы и формулируются требования к информационному обеспечению возникающих при этом задач. Постулируется принцип минимума доходности (относительного дохода) для инвестора с частичным прогнозом на будущее базового актива и на примерах проверяется его эффективность. Обсуждается ряд вопросов, имеющих отношение к применению CC-VaR на реальных рынках: выбор базиса на дискретных по страйкам рынках опционов из инструментов, отличных от простейших нормированных баттерфляев; особенности использования CC-VaR для коротких позиций, применяемых на опционных рынках; проблемы переформирования инвестиционного портфеля.

Задачи оперативного управления коалицией заёмщиков

О.Б. Байрамов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Настоящая работа продолжает исследования работ [1,2,3]. Излагается постановка задачи, примеры возможных стратегий и результаты вычислительных экспериментов.

Функционирование Коалиций заёмщиков (ссудно-сберегательных касс) сопряжено с рисками, обусловленными неопределенностью факторов (процентных ставок на депозиты и кредиты, цен на жильё, динамики прихода новых членов и нештатных выбытий ранее пришедших членов Коалиций заёмщиков). В предыдущих работах оценка влияния изменения неопределённых факторов (процентных ставок на депозиты и кредиты, цен на жильё) проводилась методами статистических испытаний при задании сценариев реализации неопределённых факторов и последующей обработкой результатов расчётов.

В работах [1,2] были получены теоретические результаты, которые устанавливали условия, при которых проявляется феномен самофинансирования ссудно-сберегательных касс в форме очереди равнозначных договоров. Чтобы оценить риски, была проведена серия вычислительных экспериментов, имитирующих функционирование очереди в условиях реального рынка. Все эксперименты продемонстрировали явное присутствие эффекта самофинансирования очереди.

Исследования, которые проводились в предыдущих работах являлись апостериорным анализом с точки зрения собственно организации Коалиций заёмщиков. В реальных условиях при формировании

Коалиций заёмщиков и оперативном её управлении в динамике априори неизвестно конечное число участников, и самое главное неопределённым фактором остаётся выбытие участников, уже вступивших в Коалиций заёмщиков. Технология исследований, разработанная в [1,2], распространяется на случай неопределённости в текущий момент относительно продолжительности очереди далее и количества и моментов нештатных выбытий в будущем уже пришедших участников Коалиций заёмщиков.

Рассматривается набор вариантов стратегий для расчётов с моделью ссудно-сберегательных касс при исследовании формирования Коалиций заёмщиков и оперативном её управлении в динамике, когда априори неизвестно конечное число участников, и неопределённым фактором является выбытие участников, уже вступивших в Коалиций заёмщиков. Основная проблема состоит в разработке синтеза реакций системы на будущие изменения факторов процесса. Рассматривается случай, когда временно свободные средства Коалиций заёмщиков размещаются на внешних вкладах под рыночный процент ζ_t. Если очередь вынуждена прибегать к заимствованию средств на кредитном рынке на покупку жилья для клиента, то ставка равна текущей рыночной ставке γ_t. При этом ССК выдает клиенту кредит на недостающую сумму по ставке $v_k = v_t < \gamma_t$.

Динамика баланса очереди G_t описывается следующей формулой

$$G_{t+1} = (1+0.01\cdot\lambda_t)^{\tau}\cdot G_t + W_{t+1}^1 + W_{t+1}^2 - Y_{t+1}$$

Здесь: $\lambda_t = \zeta_t$, если $G_t > 0$ и $\lambda_t = \gamma_t$, если $G_t < 0$; W_{t+1}^1 – текущие вклады клиентов очереди, еще не получивших кредит; W_{t+1}^2 – текущие поступления от возврата кредита клиентами очереди, купившими жилье; Y_{t+1} – текущие расходы на приобретение жилья для клиентов очереди. Строится модель процесса изменения неопределённых факторов, по ней сгенерирован полигон из реализаций и на этом полигоне для очереди заданной длины и для серии вариантов синтеза подбирались такие минимальные кредитные ставки $v_k = v_t$, при которых очередь оставалась неубыточной при всех реализациях.

В условиях реального формирования очереди возможно поступление информации постепенно, шаг за шагом. Опишем возможные стратегии поведения в рассматриваемом случае.

Аналогично работе [1] строится модель процесса изменения неопределённых факторов, по ней сгенерирован полигон из реализаций и на этом полигоне для очереди заданной длины подбирались такие минимальные кредитные ставки, при которых очередь оставалась неубыточной при всех реализациях.

Рассматривался вариант, когда в самом начале менеджеры определяют, что очередь независимо от конъюнктуры будет оборвана, например, при $M = 100$. Прогонка на шаге n делается не из предположения $M = 100$, а со значением $M = 100 - n$. Тогда предприятие не будет убыточным. Общий уровень ставок по времени оказывается ниже, чем при прогонке в работе [1]. При этом минимальная ставка будет в среднем такой же.

В другом варианте на стадии становления очереди кредитные ставки – это фиксированные ставки, определенные так, как работе [1]. Затем каждый раз ставки выбираются исходя из предположения, что текущий шаг – это шаг обрыва очереди.

Имитационные прогонки демонстрируют достаточно высокий уровень устойчивости Коалиции заёмщиков.

Список литературы

1. *Гасанов И.И.* Организация ссудно-сберегательной кассы по принципу очереди. // Сообщения по прикладной математике ВЦ РАН. - М.: ВЦ РАН, 2006 г., 79 С.

2. *Гасанов И.И.* Вычислительные эксперименты с однородной очередью ипотечных контрактов, // Теория активных систем – 2007. Труды Международной научно-практической конференции «Управление большими системами-2007». Москва. 2007.

3. *Байрамов О.Б, Сытов А.Н.* Имитационное моделирование процесса функционирования судно-сберегательной кассы в условиях кредитных рисков. // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD`2009): Материалы Третьей международной конференции (5-7 октября 2009 г., Москва, Россия). М.: Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2009, с. 236-238.

Агентно-ориентированное моделирование поведения биржи*

А.Е. Бондаренко, Л.Г. Егорова, Г.И. Пеникас

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Задача нашего исследования – анализ поведения биржи в предположении о наличии двух групп агентов, условно называемых «близорукие» и «дальнозоркие». «Дальнозоркие» агенты отличаются от «близоруких» тем, что с большей вероятностью умеют предсказывать кризисы.

Проверяемые гипотезы.

1) На рынке существуют две группы агентов – «близорукие» и «дальнозоркие», различающиеся вероятностью распознавания кризисов.
2) «Близорукие» участники рынка могут создавать ситуации «пузырей» на бирже, не умея распознавать кризисы.
3) «Дальнозоркие» лучше распознают только кризис.
4) «Близоруких» всегда больше «дальнозорких».
5) «Дальнозоркие» всегда в плюсе даже при возможном общем негативном выигрыше.

Описание модели.

На биржу поступает поток событий X_t, отражающийся на цене актива. События бывают двух типов – регулярные Q_t и кризисные R_t. Регулярные события характеризуются тем, что цена на такие события «реагирует сдержанно», изменение цены Δ_Q будет небольшим при появлении регулярного события. При появлении же кризисного события волатильность стоимости актива увеличивается в разы, $\Delta_Q >> \Delta_R$.

Рассматривается конечное число участников N. Предположим, что агенты в этой модели недостаточно влиятельны для того, чтобы их действия отражались на цене актива. Цена в нашей модели формируется экзогенно и зависит от новостного потока X_t .

Агенты наблюдают за потоком событий, однако не могут различать события со 100%-й вероятностью и совершают ошибки при идентификации наступивших событий. Все множество агентов N делится на две группы n^* «близоруких» участников и n^{**} «дальнозорких» участников, $n^*+ n^{**}=N$, $n^*>> n^{**}$. «Близорукие» участники могут распознавать кризисные события с небольшой вероятностью, «дальнозоркие» участники по сравнению с ними в кризисных событиях ошибаются реже. Общая схема параметров игроков приведена в таблицах.

n^*	Nature		
Agent		Q_t	R_t
	Q_t	p^*_{1i}	q^*_{2i}
	R_t	q^*_{1i}	p^*_{2i}

n^{**}	Nature		
Agent		Q_t	R_t
	Q_t	p^{**}_{1i}	q^{**}_{2i}
	R_t	q^{**}_{1i}	p^{**}_{2i}

Здесь p^*_{1i} - это вероятность того, что агент i из группы «близоруких» верно распознает регулярное событие Q_t, произошедшее в момент времени t, q^*_{1i} - вероятность того, что он неверно распознает регулярное событие, приняв его за кризисное. Естественно, $p^*_{1i} + q^*_{1i} = 1$. Аналогично определяются остальные параметры. Условие того, что «дальнозоркие» ошибаются в кризисах реже, выглядит следующим образом: $q^*_{2i} >> q^{**}_{2i}$.

Каждый раз при наступлении нового события игрок принимает решение о выставлении заявки на приобретение или продажу акции в объеме $x^* \in [0; \beta^*]$ или в зависимости от типа игрока. Предположим, что игроки выставляют только маркет-ордеры, т.е. выставляют заявку с указанием объема, которая совершается мгновенно по рыночной цене. Короткие позиции не запрещены, ситуации банкротства игроков мы не отслеживаем.

После каждой сделки меняется благосостояние W_{it} i-го игрока в момент времени t, добавляется выигрыш/проигрыш агента в момент времени t в зависимости от верного/неверного распознания типа события. Значения выигрышей приведены в таблице.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Международной Лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ и Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ. Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 году.

ΔW_{it}	Nature		
Agent		Q_t	R_t
	Q_t	a_i	$-d_i$
	R_t	$-b_i$	c_i

Например, если наступило событие Q_t и агент i верно его распознал (в случае повышения цены купил акции, в случае снижения – продал), то его доход равен $a_i = x_{i*}\,\Delta_Q$. Если же агент неверно распознал Q_t , то его проигрыш равен $-b_i = -x_{i*}\,\Delta_Q$. Вероятность получения положительного выигрыша a_i равна , а $-b_i$ – соответственно . Аналогично для событий типа R.

Следовательно, в общем виде при наступлении события X_t изменение благосостояния агента в момент времени t равно $\Delta W_{it} = \mathrm{sgn}(x_i)\cdot x_i \cdot \Delta_X$, где случайная величина отвечает за знак и принимает значение +1 с вероятностью и -1 с вероятностью при $X_t = Q_t$, и значение +1 с вероятностью и -1 с вероятностью при $X_t = R_t$.

Суммарное благосостояние агентов $W_t = \sum_i W_{it}$ зависит от соотношения численности групп агентов n^*/n^{**}, от соотношений между показателями их вероятностей верного распознания событий q_1^* / q_1^{**} , и отражает динамику биржевого индекса. Поиск оптимального набора параметров, наиболее соответствующего реальной динамике индексов, и является задачей нашего исследования.

Неопределённые факторы в организации коалиции заёмщиков

И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Работа продолжает исследования, анонсированные в [1]. В изучаемой модели делается попытка дать формальное описание общих принципов финансовой организации небанковской ипотеки в форме жилищного кооператива и исследовать механизмы принятия решений в условиях наличия неопределённых факторов. Приводимые в литературе [3,4] числовые примеры отражают особенности баланса средств в банковской и небанковской ипотеке, но отдельные простые примеры не могут быть основанием для ответа, сколь эффективным окажется поведение коалиции в сложных организационных ситуациях, характерных для практики.

В работе основные усилия направлены на построение и исследование динамических моделей протекания финансовых процессов в условиях коалиции заёмщиков, когда кооператив управляет финансовыми потоками, обеспечивая участников жильем. В этой ситуации рычаги управления финансами кооператива – это внутренние ставки на внутренние депозиты участников, внутренние ставки на кредиты участникам, управление потоком новых участников, а также политика использования внешних, рыночных кредитов и депозитов.

Неопределенными факторами являются динамика рыночных ставок и цен на жилье, а также спрос на услуги кооператива.

В качестве критерия рассматривается собственный капитал кооператива в некоторый заданный конечный момент времени.

С точки зрения теории принятия решений мы имеем дело с управлением динамической системой в условиях неопределенности, поэтому для анализа множества рациональных политик вполне применим богатый арсенал уже разработанных вычислительных приемов.

После анализа возможных постановок задачи в общем случае основные усилия были направлены на исследование варианта модели, в которую введен ряд упрощающих ее ограничений: рассматриваются только краткосрочные, на один шаг модели, внешние депозиты и кредиты; фиксируется сценарий притока новых клиентов; не предусматривается для внутренних депозитов возможность досрочного изъятия или пополнения вклада; также не предусматривается возможность досрочного погашения внутреннего кредита. Управление в этой модели сводится к выбору внутренних ставок на вклады и кредиты. Аналитическими средствами показано, что принципиальные особенности организации кооперативов данного класса позволяют участникам за счет эффекта самофинансирования приобретать жилье на более выгодных условиях, нежели в том случае, если они действуют самостоятельно. Установлено, что кооператив при ставках внутренних депозитов на уровне рыночных может назначать ставки внутренних кредитов строго меньше, чем внешние кредитные ставки, и при этом собственный капитал кооператива не убывает. Исследуются модели двух наиболее распространенных форм организации коалиции заемщиков – строительного кооператива и ссудно-сберегательной кассы.

Полученные теоретические результаты иллюстрируются представленной в работе [5] обширной серией вычислительных экспериментов для ссудно-сберегательной кассы. Расчеты демонстрируют значительный экономический эффект, который получают приобретатели жилья за счет объединения в кооператив.

Рассматривается один из способов организации ссудно-сберегательной кассы (ССК), создаваемой с целью приобретения жилья ее участниками. Предполагается, что ССК стоит отношения с клиентами на основе договоров следующего типа. Согласно договору, клиент в течение определенного периода времени делает равные периодические вклады под оговоренный процент на счета ССК. По окончании этого периода ССК покупает для клиента жилье, соответствующее параметрам, указанным в договоре. Клиент получает в пользование жилье, которое до окончания действия договора остается в залоге у ССК. С момента приобретения жилья до окончания действия договора клиент равными долями выплачивает проценты по кредиту и его основную сумму, равную разнице между стоимостью жилья и вкладами клиента вместе с начисленными на них процентами.

Используется ограниченный набор типовых договоров. Весь поток заключаемых договоров разбивается на отдельные очереди. Очередь состоит из договоров одного типа. В них прописано одинаковое количество периодических вкладов до приобретения жилья и одинаковое количество кредитных выплат. Договоры очереди заключаются через равные промежутки времени так, что каждый раз оформляется ровно один договор. С той же периодичностью клиентами очереди производятся вклады и кредитные выплаты. Свойства описываемой системы исследуются посредством изучения одной отдельной очереди.

Моделируемая схема за счет использования для кредитов одних участников очереди вкладов других ее участников позволяет снизить для членов ССК ставки по кредитам по сравнению с рыночными ставками. Это доказывается в виде формальных утверждений для случая, когда рыночные ставки постоянны. Однако существование искомых внутренних кредитных ставок в условиях стабильного рынка не гарантирует их удачный выбор на практике. Помимо рисков, обусловленных неопределенностью в изменении рыночных ставок и цен на жилье, следует учитывать риск снижения спроса на услуги компании. Чтобы оценить эти риски, была проведена серия вычислительных экспериментов, имитирующих функционирование очереди в условиях реального рынка. Расчеты проводились в следующих вариантах.

а) Рассматривалось четыре варианта параметров очереди, различающихся частотой заключения договоров и длительностью функционирования очереди.

б) Рассматривалось два типа сценариев изменения цен и ставок. Это равномерное изменение цен на жилье при постоянных ставках, и это цены и ставки, определяющиеся согласно некоторой модели случайного Марковского процесса. И в том, и в другом случае рассматривалось два варианта инфляции – в 10% и в 2%. Кроме того, рассматривался вариант постепенного, в течение 10-ти лет, снижения инфляции от уровня 10% до уровня в 2%.

Во всех вариантах расчетов рассматривалось два типа финансовой организации ССК. В одном случае ССК выступает как организация, самостоятельно определяющая источники своего финансирования. Для очереди, обслуживаемой таким ССК, искались значения ставок внутренних кредитов, при которых функционирование очереди было бы неубыточно. В другом случае ССК – это проект крупной финансовой компании, которая и кредитует его при необходимости. При этом рассчитывалась внутренняя ставка дохода (IRR) от вложений в очередь. Все эксперименты продемонстрировали явное присутствие эффекта самофинансирования очереди, позволяющего значительно снизить кредитные ставки для ее клиентов. Наиболее перспективным представляется вариант, когда ССК функционирует как организация, интегрированная в крупную экономическую структуру. Такая структура, привлекая клиентов возможностью предварительного доходного накопления средств с последующим кредитованием жилья по ставкам, которые ниже рыночных, может получать доходы по инвестициям в ССК, существенно выше, чем по среднерыночным ставкам. Если бы структура, инвестирующая в очередь, действовала в рамках государственной жилищной программы, то без убытка для финансов данной структуры ставки клиентских кредитов могли бы быть приближены к уровню, близкому к уровню ставок по вкладам.

Список литературы

1. *Гасанов И.И., Ерешко Ф.И.* Влияние случайных факторов на организацию ссудно-сберегательной кассы. // Вторая международная конференция "Управление развитием крупномасштабных систем". MLSD’2008. Доклады. ИПУ РАН, 1-3 окт.2008г. т.1 стр.227-229.

2. *Гасанов И.И., Ерешко Ф.И.* Моделирование ипотечных механизмов с самофинансированием // М.: ВЦ РАН, 2008. 60с.

3. *Аверченко В., Весели Р., Наумов Г., Файкс Э., Эртл И.* Принципы жилищного кредитования./ // М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. 261 с.

4. *Полтерович В.М.,. Старков О.Ю.* Формирование ипотеки в догоняющих экономиках: проблема трансплантации институтов. // М.: Наука, 2007. 196 с.

5. *Гасанов И.И.* Организация ссудно-сберегательной кассы по принципу очереди. // М.: ВЦ РАН, 2006. 45с.

Анализ принятия решений в моделях кредитных организаций

И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко, А.Н. Сытов

В докладе рассматриваются модели функционирования во времени кредитной организации и коалиции, организуемой с целью приобретения её участниками некоторых активов, например, недвижимости. Приобретению участником коалиции актива предшествует накопление им денежных средств и получение кредита, который он погашает в дальнейшем. При этом сама коалиция может взаимодействовать с внешней средой, то есть вкладывать денежные средства и брать займы в стороннем банке.

Модели представляют собой формальную запись соотношений балансового типа с ограничениями на доступные ресурсы. Выделяются фазовые переменные и управление.

Рассматриваются некоторые способы организации коалиции при различных возможностях вложения и заимствования коалицией денежных средств во внешнем банке.

Вводится понятие самофинансирования коалиции, как такой ситуации, при которой, в момент окончания фукнционирования, у коалиции будут отсутствовать внешние заимствования. Также вводится понятие полного самофинансирования коалиции. В данном случае коалиция в процессе своего функционирования не прибегает к внешним заимствования.

Рассматривая коалицию как посредник между банком и участниками, за счет экономии на масштабе описывается механизм расширения коалиции.

Приводятся результаты численных расчетов. В частности, при различных способах организации коалиции и постоянном росте цен на актив исследуется зависимость минимальной процентной ставки по кредитам участников, при которой достигается самофинансирование, от темпа роста цен и числа участников коалиции. Аналогичные расчеты выполняются и по изучению полного самофинансирования.

Изучается функционирования коалиции в условиях риска, связанного неопределенностью в изменении рыночных ставок и цен на актив. Для этого была построена модель динамики цен и рыночных ставок в виде стохастического процесса и проведены статистические испытания, рассчитывая финансовые показатели коалиции при различных реализациях этого процесса.

Предлагаются методы оперативного управления коалицией при учёте неопределённых факторов.

Исследование операций в автоматизированном трейдинге

А.Ф. Ерешко, А.М. Аникин

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Автоматизированная торговля на финансовых рынках (или электронная алгоритмическая торговля, алготрейдинг, торговля с чёрным ящиком, роботорговля) использует электронные возможности для генерирования заявок на биржу на основе формальных алгоритмов, включая параметры: времена выставления заявок, цены, количество и объём, без непосредственного участия инвестора. К специальному классу алгоритмической торговли относится высокочастотная торговля, когда интервалы времен информирования участников торгов и соответственно моменты между последовательно принимаемыми решениями столь малы, что недоступны для реакций человека. Алгоритмический трейдинг уверенно набирает обороты и, как подтверждает статистика, применяется практически на всех биржевых площадках. Согласно статистике в Интернете, 73% сделок на фондовой бирже NYSE осуществляется автоматическими системами в режиме высокочастотной торговли. Высокая эффективность алгоритмического трейдинга привлекает внимание профессиональных трейдеров, и они предпринимают значительные усилия для достижения ещё большей эффективности. В то же время регуляторы выражают беспокойство по поводу стремительного разрастания алготрейдинга, поскольку в ходе этих операций уменьшается возможности регулирующих функций. Алгоритмическая и высокочастотная торговля стали предметом многочисленных разбирательств инициированных американскими регуляторами SEC (U.S. Securities and Exchange Commission) и CFTC (Commodity Futures Trading Commission), в связи с обвинением в их причастности к событиям 6 мая 2010 года, когда ведущие фондовые индексы США испытали крупнейшее за всю свою историю внутридневное падение.

На бирже ММВБ в 2010 году, доля высокочастотных систем в обороте на фондовом рынке составляла порядка 11-13 %, а по числу заявок 45 %. По данным РТС, в 2010 году на долю торговых роботов в обороте на срочном рынке РТС FORTS приходилось примерно 50 %, а их доля в общем количестве заявок в определенные моменты достигала 90 %

Системы автоматической торговли активно используются в решении проблем хеджирования, маркет-мэйкинга, арбитража, высокочастотной торговли, управления клиентскими позициями.

Значительное внимание на биржевых площадках уделяется спекулятивной составляющей при использовании автоматических систем для торговли на РТС ФОРТС, примером служат математические модели, используемые при работе методом классической оценки «спрос-предложение». Отметим типичные проблемы, с которыми сталкиваются разработчики моделей и программ, такие как: подключение к торгам, актуальность биржевой информации, способы тестирования и нахождения оптимальных настроек.

Развиваемый подход базируется на основных понятиях исследования операций и теории принятия решений. Следуя методологии исследования операций, в деятельности на финансовых рынках также выделяется оперирующая сторона (инвестор), исследователь финансовой операции, разрабатывающий стратегию поведения в интересах инвестора. Рациональное поведение инвестора предполагает для исследования финансовой операции необходимость определения набора переменных для описания объекта управления, и математической формулировки модели управляемого объекта. Таковым в задаче торговле на финансовом рынке служит динамика котировок и объёмов выставляемых заявок участников рынка. Для инвестора, как выделенного игрока, остальной рынок представляется неконтролируемой средой, относительно которой он располагает ограниченной информацией. Представляется вполне разумной модель среды, принимаемой как мультиагентной среды, в которой присутствует и шумовые трейдеры и выделенное количество влиятельных игроков.

Системный взгляд на проблему организации алгоритмического трейдинга в интересах инвестора включает в себя выбор технического обеспечения, выбор брокера, выбор источников получению информации, разработку стратегии, организацию всего процесса, который имеет динамический процесс с ограничением или оптимизацией средств. Для всех этапов необходимо своё модельное описание, информация и методы принятия решений.

Принципиально задача выработки стратегии управления представляет собой процесс принятия решений при неопределенности неконтролируемых факторов, и если она рассматривается как стохастическая, то представляется многомерным (многофакторным) процессом, и для определения структуры которого, и тем более, для верификации параметров которого, недостаточно данных. В подобных случаях часто используется способ поиска решения, который принято называть оптимизацией на хронологических (исторических) рядах наблюдений. За основу метода берутся уже известные данные о проявлении (реализации) неконтролируемых факторов в прошлом и ищутся такие правила управления изучаемым объектом, которые были бы эффективны, будь они применены в прошлом. За этим подходом стоит идея, что коль скоро неопределенность носит регулярный характер, то способ управления, который был бы успешным в течение достаточно продолжительного прошлого, будет таким и в будущем.

Основные понятия. Маркет-мейкер (далее ММ) – профессиональный участник рынка ценных бумаг, основной задачей которого является формирование, развитие и поддержание ликвидности посредством поддержания двусторонних котировок на покупку/продажу ценных бумаг. ММ-договор – двух- или трехсторонний договор между ММ и биржей и/или эмитентом ценных бумаг, описывающий обязанности сторон (в том числе требования к двусторонним котировкам). Двусторонняя котировка – объявленные ММ заявки на покупку (bid) и продажу (ask) ценной бумаги, соответствующие требованиям ММ-договора (в случае его наличия). Спрэд двусторонней котировки (далее спрэд) – значение в процентах, рассчитываемое в процентах, и определяемое как отношение разницы между лучшей ценой bid и лучшей ценой ask по отношению к лучшей цене ask. Объем котировки – это значение, рассчитываемое, как произведение цены на количество ценных бумаг, указанных в заявке. Книга заявок – два списка заявок на покупку и продажу упорядоченные по убыванию и возрастанию цены соответственно.

Источники дохода ММ. Прежде всего, маркет-мейкинг нужно рассматривать как торговую стратегию, которая должна приносить прибыль. При этом нужно отличать два типа ММ – свободных ММ и ММ, работающих по договору. Свободный ММ – участник рынка, для которого выставление двусторонних котировок является частью торговой стратегии. Такой ММ не имеет официального статуса и не берет на себя никаких дополнительных обязательств, но и не получает никаких преференций. Единственный источник его дохода – доходность его собственной торговой стратегии. ММ, работающий по договору – участник рынка, для которого выставление двусторонних котировок является обязательством перед биржей и/или эмитентом. Такой ММ получает официальный статус ММ по данной ценной бумаге и ряд преференций, которые отражаются в договоре.

Типовые требования к двусторонним котировкам. Ограничение на спрэд, ограничение на объем, продолжительность поддержания котировок, ограничение на максимальный объем сделок по заявкам, в

зависимости от конкретной ценной бумаги могут существовать и другие требования к двусторонним котировкам.

Математическая постановка задачи ММ. Общая постановка задачи ММ следующая – на основании книги заявок на покупку и продажу от участников рынка сформировать такую двустороннюю котировку, чтобы выполнялось заданное условие оптимальности. Как правило, в теоретических моделях используется книга, состоящая из limit orders – заявок с ограничением цены, гарантирующих цену исполнения, но не сам факт сделки. Наиболее распространенное условие – прибыльность торговой стратегии. Если речь идет о ММ, работающему по договору, функция оптимальности должна также включать в себя получаемые ММ компенсации и учитывать требования к двусторонней котировке (например, в случае невыполнения требований на ММ налагается штраф, который учитывается в функции оптимальности). Также могут возникать различные дополнительные ограничения. Например, в случае отсутствия монополии каждому ММ приходится также следить за тем, чтобы его спрэд и объем был на уровне конкурентов (можно назвать это условием неубыточности на конкурентном рынке). Также часто вводятся ограничения, связанные с открытыми позициями ММ (inventory). ММ это в первую очередь трейдер, и у него могут быть открытые позиции по бумагам, маркет-мейкингом которых он занимается, поэтому ММ вынужден корректировать свои котировки с учетом изменения стоимости своего портфеля.Кроме того, стратегии ММ можно разделить на непредсказательные (non-predictive) и предсказательные (predictive). Тип стратегии также оказывает влияние на математическую постановку. В случае непредсказательных стратегий ММ для решения своих задач использует только книгу заявок. В случае предсказательных стратегий ММ также пытается предсказать будущие движения рынка. В идеале ММ должен преследовать только цели поддержания ликвидности, то есть быть нейтральным по отношению к ценовым движениям (market-neutral), но на практике ММ может преследовать какие-то свои цели или цели компаний-клиентов (часто ММ это крупнейшие брокеры), что в свою очередь может приводить к сильным движениям рынка.

Обзор работ по тематике. Основная масса работ по заданной тематике выполнена западными исследователями. В России интерес научного сообщества к данной тематике крайне низок (вероятно, это связано с относительной молодостью российского фондового рынка в целом и института маркет-мейкинга в частности). Как правило, исследования ведутся в контексте автоматизации деятельности ММ. При этом чаще всего рассматривается случай ММ-монополиста. Первые работы, посвященные формализации деятельности ММ, существовали уже несколько десятилетий назад – например, [1]. Работа представляет собой общее теоретическое исследования ММ-процесса. Работы [2] и [3] больше приближены к реальности и содержат много полезных практических выводов. Работа [2] содержит общее описание и постановку задачи ММ. В работе рассматриваются непредсказательные стратегии на модельном рынке PXS (Penn Exchange Simulator) – этот рынок представляет собой реальные котировки с электронной биржи Island ECN, к которым добавляется часть случайных симуляционных котировок. Работу [3] отличает большая глубина и «физичность» (степени похожести на реальный рынок) исследования. Кроме того, построенная в работе [3] модель биржи относится к классу так называемых «многоагентных» моделей, которые традиционно сильно перекликаются с тематикой маркет-мейкинга. Кроме того, стоит отметить целый пласт исследований, посвященных тематике моделирования микроструктуры финансовых рынков – при таком моделировании процессы, происходящие на бирже, являются следствием действий конкретных игроков, их стратегий, ожиданий, степени владения информацией, психологии и т.п. Подробные обзоры моделей рыночной микроструктуры содержатся в работах [4-6].

Биржи и маркет-мейкинг. Разные биржи используют разные подходы к маркет-мейкингу. Например, на NYSE на каждой акции существует свой ММ-монополист, деятельность которого строго контролируется биржей. На NASDAQ в свою очередь ММ может быть несколько, и они конкурируют между собой. Контроль биржи при этом минимален. На российском фондовом рынке (биржа РТС) деятельность ММ осуществляется через двух- и трехсторонние договоры между ММ, биржей и, возможно, эмитентом. В случае трехстороннего договора в обязанности ММ помимо поддержания двусторонних котировок входит также и оказание услуг эмитенту по включению и поддержанию ценных бумаг в Котировальных списках. Для определенных котировальных списков наличие договора с ММ является обязательным. РТС позиционирует институт ММ как средство для развития ликвидности рынка акций «второго эшелона», ликвидности компаний небольшой и средней капитализации. Однако на практике ММ пока работают в основном на «голубых фишках» – в сегменте фондового рынка представлено порядка 20 ММ, которые работают с бумагами около 35 эмитентов (в большинстве своем это нефтегазовые и другие сырьевые компании, а также крупнейшие государственные банки). Это говорит о том, что институт ММ в России пока развит слабо, однако имеет хорошие перспективы дальнейшего развития.

Список литературы

1. *Amihud Y., Mendelson H.* Dealership Market, Market-Making with Inventory. Journal of Financial Economics, 8, 31-53, 1980.
2. *Nevmyvaka Y., Sycara C.* Electronic Market Making: Initial Investigation. Carnegie Mellon University Paper, 2003.
3. *Das S.* Intelligent Market-Making in Artificial Financial Markets., Massachusetts Institute of Technology Paper, 2003.
4. *Madhavan A.* Market microstructure: A survey. Journal of Financial Markets, 3, 205-258, 2000.
5. *Stoll H.* Market Microstructure. Handbook of the Economics of Finance, 2003.
6. *Bondarenko O.* Competing market makers, liquidity provision and bid–ask spreads. Journal of Financial Markets, 4, 269-308, 2001.

Вычислительные эксперименты с управлением коалицией заемщиков

А.Ф. Ерешко, А.Н. Сытов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

В прошлых работах авторов были поставлены задачи формирования Коалиции заёмщиков в условиях неопределённости факторов (процентных ставок на депозиты и кредиты, цен на жильё, динамики прихода новых членов и нештатных выбытий ранее пришедших членов) и предложены некоторые алгоритмы. Настоящая работа продолжает указанные исследования. В работах [1-3] предложено формальное описание пошаговой динамики формирования Коалиции, позволяющее проводить необходимые вычислительные эксперименты.

С формальной точки зрения выбор внутренней ставки кредитования (и кредитных выплат) представляет собой поиск оптимального синтеза управления в динамической системе при пошаговом поступлении информации о неопределённых факторах (в данном случае, приходов и выбытий участников Коалиции). Критерием задачи выступает качественный показатель обеспечения самофинансирования Коалиции, т.е. обеспечение в последний момент равенства нулю собственного капитала Коалиции. Поскольку решение сформулированной задачи крайне затруднительно, принят к расчётам приближённый подход, при котором производится генерация конечной серии рациональных стратегий выбора кредитных выплат и последующая статисти-ческая оценка устойчивости Коалиции при различных сценарных реализациях неопределённых факторов.

Характеристики стратегий формирования Коалиции.

Для иллюстрации постановок возможных стратегий выбора кредитных выплат приведём пример формирования Коалиции на первых двух шагах. Положим, что все факторы модели, кроме внутренней кредитной ставки и динамики прихода участников заданы.

Первый шаг. В момент времени $t=0$ в Коалицию вступает первый участник. Из условия самофинансирования для системы, состоящей из одного участника, определяется ставка v_1^* (минимальная ставка по внутренним кредитам, при которой удается добиться самофинансирования). Для одного участника эта ставка будет равна ставке по внешним кредитам $v_1^* = \gamma$.

Второй шаг. В момент времени $t=1$ в Коалицию вступает второй участник. Для Коалиции из двух участников определяется ставка v_2^* и соответствующие кредитные выплаты, при которой Коалиция из двух участников достигает самофинансирования, произведя перерасчёты с самого начала. Рассмотрим тот случай, когда $v_2^* < v_1^* = \gamma$. Тогда для стратегии всей системы возможны, по крайней мере, два варианта:

Вариант 1: Возможно в реальном расчёте траектории системы установить кредитные выплаты для первого участника, рассчитанные по ставке v_1^* на все его кредитные шаги. А для второго участника рассчитывать кредитные выплаты по ставке v_2^* а всех его кредитных шагах.

Вариант 2. Возможно в реальном расчёте траектории изменить кредитную выплату для первого члена и рассчитать её по ставке v_2^*. И так поступать на каждом шаге, при последующем увеличении числа участников Коалиции.

Исследования, которые проводились в предыдущих работах являлись «апостериорным анализом» с точки зрения собственно организации коалиции, - при заданным числом участников и заданным временем её существования и заданными договорными отношениями между коалицией, как юридическим лицом, и её участниками. В реальных условиях при формировании коалиции в динамике

априори неизвестно количество участников и их набор финансовых показателей. Поэтому принципиально важной становится проблема по выбору рациональной стратегии поведения коалиции (которая является независимым юридическим лицом) по формированию очереди заёмщиков и априорного выбора условий объединения, привлекательных для заёмщиков. Назовём анализ формирования коалиции «априорным анализом» и отметим, что этот анализ должен дать оценки гарантии успешного функционирования ссудно-сберегательных касс с пониженной ставкой внутреннего кредита по сравнению с чисто банковской ипотекой.

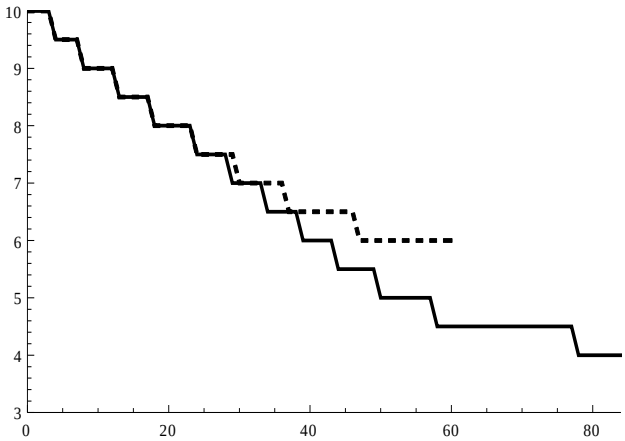


Рис. 1. Графики зависимостей процентной ставки по внутренним кредитам от времени в апостериорном случае (штрихпунктирная линия) и в априорном случае для гарантирующей стратегии (сплошная линия)

Вычислительные эксперименты

Считается, что коалиция организуется по принципу очереди, т.е. в каждый момент времени вступает ровно один участник. Задаются следующие основные параметры: количество участников 61, цена недвижимости 80 000 единиц, накопительные и кредитные платежи участников 1 600 единиц, процентная ставка по внутренним депозитам и внешним вложениям 4%, порог накопления 0.5, процентная ставка по внешним заимствованиям 10%. Зависимость процентной ставки по внутренним кредитам от времени рассчитывается в двух случаях. В первом, при последовательном формирования очереди и пересчетам кредитной ставки для текущего состава коалиции (апостериорная стратегия) на интервале от начального момента времени, когда в коалицию вступает первый участник и до момента времени, когда в коалицию вступает последний участник. Во втором априорном случае для гарантирующей стратегии, на интервале от начального момента времени и до момента времени, когда в коалиции выдается последний кредит. Результаты расчетов представим в графическом виде.

Список литературы

1. *Сытов А.Н.* Имитационные эксперименты с общей финансовой моделью жилищной коалиции // Материалы Второй международной конференции “Управление развитием крупномасштабных систем”. М.: ИПУ РАН, 2008.

2. *Ерешко Арт.Ф.* О проблеме генерации сценариев при выборе стратегий в задаче организации коалиции заемщиков // Материалы Третьей международной конференции “Управление развитием крупномасштабных систем”. М.: ИПУ РАН, 2009.

О построении производственно-финансовых моделей функционирования многоуровневых корпораций

А.Ф. Кононенко, В.В. Шевченко

ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

Задача построения производственно-финансовых моделей (ПФМ) деятельности предприятий, корпораций, промышленных комплексов с многоуровневой иерархией (ОПК или АПК России, ВГТРК, промышленный комплекс того или иного региона и т.п.) возникает в процессе создания самых различных информационно-аналитических систем (ИАС) поддержки принятия экономических решений. При этом центральным вопросом является вопрос выбора системы показателей (управляемых или не управляемых, базовых или производных), динамика которых будет описывать функционирование рассматриваемой экономической системы в ее взаимодействии с контрагентами с возможным присутствием природных, не управляемых действующими агентами неопределенностей. После того, как такая система показателей выбрана, возникает проблема определения системы соотношений

(взаимосвязей) между выбранными показателями и проблема оценки необходимых для проведения расчетов исходных данных. Имеющиеся технологии решения перечисленных задач описаны во многих работах, к числу которых можно отнести и работы [1-5]. Эти технологии, однако, при всем их разнообразии, не позволяют обеспечить необходимой гибкости описания реальных производственно-экономических взаимодействий. Имеющийся у авторов опыт построения ПФМ, накопленный в процессе решения целого ряда практических задач ([6,7] и др.), показал, что между сложившимся языком экономико-математического моделирования и языком производственно-экономической практики имеется значительный разрыв, без преодоления которого не следует ожидать широкого внедрения математической поддержки процессов принятия производственно-экономических решений. С целью преодоления такого разрыва был разработан язык операционного игрового сценарного моделирования ([6-8] и др.), основанный на синтезе базовых представлений исследования операций и аналитического бухгалтерского учета. Использование этого языка существенно увеличивает возможности описания производственно-экономических взаимодействий, построения ПФМ функционирования самых различных экономических структур, создания информационно-аналитических систем (ИАС) поддержки принятия производственно-экономических решений.

При разработке ПФМ функционирования многоуровневых корпораций с использованием операционного игрового моделирования все процессы, происходящие при этом функционировании, описываются как проведение в дискретном времени действующими агентами (самой корпорацией, ее контрагентами и ее подразделениями) производственных, обменных (купли-продажи продукции, услуг, труда), инновационно-модернизационных, налоговых, кредитных, инвестиционных и иных операций. Операции могут проводиться одним или несколькими агентами (игроками). Проведение каждой операции изменяет обороты и сальдо определенных базовых счетов игроков, описывающих их состояния. Динамика производных показателей описывается с использованием аналитических счетов, обороты и сальдо которых являются функциями оборотов и сальдо базовых и других аналитических счетов. При этом при работе с самыми различными микро- и макроэкономическими взаимодействиями удается обойтись использованием одного и того же базового «плана счетов» (мало чем отличающегося от максимально расширенного плана счетов, используемого в бухгалтерском учете) и одного и того же «плана операций». В связи с чем достигается весьма высокий уровень фрактальности описания экономических процессов.

В процессе разработки ПФМ функционирования многоуровневых корпораций выделялся достаточно компактный набор показателей, динамика которых хотя и в самом агрегированном виде, но достаточно целостно и всесторонне описывает производственно-экономическую деятельность рассматриваемой корпорации. К этим показателям относились привычные и понятные практикам показатели выручки, валовой и чистой прибыли, себестоимости, стоимости основных фондов с износом и без износа, среднесписочной численности и среднемесячной заработной платы и т.п. Для определения замкнутой системы соотношений, позволяющей пересчитывать значения этих показателей в некоторый момент времени прогнозирования исходя из их значений в предыдущие моменты составлялась и анализировалась операционная игровая модель взаимодействия корпорации с ее контрагентами. В зависимости от уровня детализации рассмотрения и состава показателей детализировались и агрегировались рассматриваемые операции. Управления игроков при проведении операций формировали сценарные условия, определяющие тот или иной сценарий производственно-экономической деятельности корпорации.

Описанный способ формирования ПФМ позволяет использовать одну и ту же модель с минимальными изменениями как для сценарного прогнозирования деятельности корпорации в целом, так и для прогнозирования деятельности ее составляющих. Так при работе с ОПК РФ единообразно описывались ОПК РФ в целом, его отдельные отрасли, корпорации, предприятия, региональные комплексы. Нет оснований полагать, что такого рода фрактальность не будет иметь место и при работе с другими многоуровневыми корпорациями.

Разработанная система ПФМ для корпорации и ее составляющих может использоваться в качестве основы для создания соответствующей ИАС поддержки принятия решений. При работе таких ИАС обеспечиваются достаточно широкие возможности варьирования сценарных условий, определяющих исполнение самых различных производственно-экономических программ, возникающие в процессе исполнения этих программ риски, принимаемые компенсационные меры по парированию реализовавшихся рисков.

Список литературы

1. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 328 с.
2. *Поспелов И.Г.* Моделирование экономических структур. М.: ФАЗИС, ВЦ РАН, 2003. 191 с.
3. *Павловский Ю.Н.* Имитационные модели и системы. М.: ФАЗИС, ВЦ РАН, 2000. 134 с.
4. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005. 584 с.

5. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.

6. *Кононенко А.Ф., Шевченко В.В.* Задачи управления производственными корпорациями и операционные игры. М.: ВЦ РАН, 2004. 42 с.

7. *Кононенко А.Ф., Шевченко В.В.* Использование игрового и сценарного моделирования в решении задач управления промышленным комплексом региона. М.: ВЦ РАН, 2007. 48 с.

8. *Кононенко А.Ф., Шевченко В.В.* О взаимосвязи операционных игр с классическими игровыми моделями. М.: ВЦ РАН, 2010. 48 с.

Оценка потенциалов развития рынков ИЖК европейских стран

И.М. Промахина

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

В работе оцениваются потенциально возможные при данных значениях макроэкономических показателей уровни развития рынков ипотечного жилищного кредитования (ИЖК) европейских стран. Одновременно оцениваются технические эффективности функционирования этих рынков. При этом под технической эффективностью рынка данной страны в данный год понимается отношение фактического среднего уровня развитости рынка к его потенциальному уровню. Для решения указанных задач была использована эконометрическая модель стохастической границы для панельных данных с изменяющейся во времени технической эффективностью [1].

Метод стохастической границы разработан для оценки оптимального выпуска предприятий при данных затратах ресурсов. Однако, ввиду сходства проблем, данная методика хорошо работает и при оценивании верхних границ развитости рынков ипотечного кредитования. Можно рассматривать степень развитости рынка ИЖК как выпуск «предприятия», на входе которого находятся макроэкономические факторы, определяющие стоимость и доступность ипотечных кредитов населению. Факторами, которые определяют эффективность функционирования рынка ИЖК («факторы, находящиеся под контролем предприятия»), выступают характеристики ипотечного кредита, процедуры выдачи кредита, организация системы кредитования, способы формирования первичных и вторичных рынков ипотечного кредитования и т. п.

Для анализа были взяты данные за период 1997-2007 гг. по 15 странам Западной Европы с уже сложившимися рынками ИЖК, и девяти странам Центральной и Восточной Европы (ЦВЕ), рынки которых еще только формируются.

Зависимой переменной (y_{it}) в модели выступает фактор, характеризующий степень развитости рынка ИЖК. В качестве такового используется отношение задолженности по ипотечным кредитам к ВВП страны в номинальном выражении в процентах. Объясняющими факторами выбраны: ВВП на душу населения в номинальном выражении (gdp_{it}) в долларах США, номинальная процентная ставка (ставка рефинансирования, учетная ставка) (irn_{it}) в процентах, уровень безработицы (un_{it}), в процентах.

Таким образом, для двух указанных выше групп стран оценивается следующая модель стохастической границы:

$$ln(y_{it}) = \beta_0 + \beta_1 * ln(gdp_{it}) + \beta_2 * ln(irn_{it}) + \beta_3 * ln(un_{it}) + v_{it} - u_{it}.$$

Здесь v_{it} и u_{it} – случайные ошибки модели, относительно которых делаются следующие предположения: $u_{it} \geq 0$ и $u_{it}=exp\{-\eta\ (t-T_i)\}\cdot u_i$; u_i независимы и имеют одно и то же усеченное в нуле нормальное распределение, $u_i \sim N^+(\mu, \sigma_u^2)$; v_{it} – независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с нулевым средним, $v_{it} \sim N(0, \sigma_v^2)$; кроме того, полагается, что u_i и v_{it} распределены независимо друг от друга и от объясняющих переменных. В этой модели случайная величина v_{it} определяет отклонение уровня развитости рынка страны i в год t от оптимально возможного его значения вследствие случайных причин, не зависящих от структуры рынка и правил его функционирования. Случайная величина $-u_{it}$ представляет собой отклонение от граничной функции по причинам, зависящим от агентов, определяющих эти структуры и правила. Техническая эффективность в такой модели определяется как $\xi_{it} = exp(-u_{it})$.

В выражении для u_{it} момент времени T_i - последний для i-й страны год, для которого в выборке данных представлены значения факторов модели Коэффициент η называется коэффициентом затухания (возрастания) эффективности. Он оценивается наряду с другими параметрами модели. Получение положительной оценки для η свидетельствует о возрастании эффективности рынка ипотечных кредитов к моменту T_i, значения η, меньшие нуля будут при убывании эффективности, нулевое значение означает неизменность эффективности на протяжении всего периода.

Результаты оценивания модели приведены в таблице 1.

Как и следовало ожидать, потенциально возможное значение отношения «задолженность по ипотечным кредитам/ВВП страны» в наибольшей степени определяется уровнем доходов населения. Отрицательную зависимость этого показателя от роста номинальных ставок процента и уровня безработицы также было легко предсказать. Обращает на себя внимание более сильное влияние на потенциал роста рынков ИЖК всех выбранных макроэкономических показателей в группе стран ЦВЕ с еще формирующимися ипотечными системами, нежели чем в странах Западной Европы с устоявшимися механизмами жилищной ипотеки.

Положительная и значимо отличная от нуля оценка коэффициента η свидетельствует о возрастании эффективности функционирования рынков в обеих группах, причем, в среднем, это возрастание происходит быстрее в странах ЦВЕ.

По модели были получены не только оценки параметров, но и технические эффективности рынков ИЖК для каждой страны за каждый год, а также оценки значений стохастической границы, то есть оптимально возможные отношения задолженностей по кредитам к ВВП, также для каждой страны и за каждый год рассматриваемого периода. Средние за период значения этих показателей для всех стран приведены в таблицах 2 и 3. Там же приведены и средние фактических значений уровней развитости ИЖК.

	Оценки коэффициентов при $ln(gdp_{it})$	Оценки коэффициенты при $ln(irn_{it})$	Оценки коэффициентов при $ln(un_{it})$	Оценки коэффициента η
Группа из 15 стран	0,44	-0,10	-0,08	0,05
Группа из 9 стран	0,63	-0,67	-0,34	0,10

Таблица 1. Результаты оценивания модели.
Все коэффициенты значимы при уровнях значимости не более 6%.

Страны	Средние за период оценки значений эффективностей	Средние за период оценки значений стохастических границ (в %)	Средние за период фактические значения отношения задолженности по ипотечным кредитам к ВВП страны (в %)
Дания	0,96	84,18	80,80
Нидерланды	0,96	77,16	77,69
Португалия	0,89	52,69	49,16
Великобритания	0,86	76,51	66,33
Швейцария	0,85	99,25	84,10
Германия	0,77	69,00	52,11
Швеция	0,67	75,89	50,04
Испания	0,64	56,93	38,91
Ирландия	0,51	80,11	43,78
Финляндия	0,48	72,47	34,20
Бельгия	0,47	63,21	29,95
Франция	0,37	67,00	24,83
Греция	0,27	49,49	16,05
Австрия	0,24	76,66	19,61
Италия	0,19	64,77	12,38

Таблица 2. Средние значения показателей эффективности функционирования 15 стран Западной Европы.

Страны	Средние за период оценки значений эффективностей	Средние за период оценки значений стохастических границ (в %)	Средние за период фактические значения отношения задолженности по ипотечным кредитам к ВВП страны (в %)
Хорватия	0,422	21,35	9,70
Эстония	0,250	49,13	14,56
Словакия	0,204	34,15	7,47
Латвия	0,186	49,61	12,19
Польша	0,173	25,61	4,37
Чехия	0,146	58,34	9,18
Венгрия	0,129	56,62	8,29
Болгария	0,080	25,53	3,03
Словения	0,045	44,18	2,83

Таблица 3. Средние значения показателей эффективности функционирования девяти стран ЦВЕ.

Сравнение таблиц 2 и 3 очень явно показывает большое различие в уровнях развитых и только формирующихся рынков ИЖК. Во многих странах Западной Европы эффективность организации этих рынков оптимальна. Противоположная картина наблюдается в странах ЦВЕ. Коэффициент корреляции между эффективностью и фактически достигнутым уровнем развития ИЖК в первой группе равен 0,96, почти функциональная линейная зависимость. А это означает, что при данном социально-экономическом положении страны степень востребованности ипотечных жилищных кредитов почти полностью определяется организацией рынка этих кредитов. В группе из девяти стран коэффициент корреляции между эффективностью функционирования рынка и достигнутым уровнем его развития также положительный и значимо отличный от нуля, хотя и не такой большой - 0,58.

В таблице 2 интересно также отметить и тот факт, что почти все страны с самыми низкими оценками потенциального уровня развития рынка ИЖК, полученными по периоду 1997-2007, впоследствии оказались экономически самыми проблемными странами ЕС.

Список литературы

1. *Battese G.T., Coelli T.J.* Frontier Production Function, technical efficiency and panel data: with application to Paddy Farmers in India // Journal of Productivity Analysis, 1992. P. 117-138.

Модели коалиции заемщиков с механизмом выдачи кредитов на основе жребия

А.Н. Сытов

Вычислительный центр им А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Ключевые слова: коалиция заемщиков, жребий, цены, вычислительный эксперимент.

Введение

В настоящей работе предлагается модель коалиции однородных заемщиков, с выбором участников для получения кредита и последующего приобретения им актива путем жребия. При этом предполагается, что цены на активы могут изменяться со временем.

1. Основные соотношения модели и постановка оптимизационной задачи

Введем соотношения, которые будут связаны с описанием одного участника коалиции. Примем следующие обозначения: U – размер депозитных вкладов участников, V – размер кредитных выплат; u – процентная ставка по депозитам; v – процентная ставка по кредитам. Цена актива в момент времени t обозначается как C_t.

Накопления участника на депозите G_t^D описываются следующим конечно-разностным соотношением:

$$G_{t+1}^D = (1+u)\cdot G_t^D + U\ ,\ t = 0,1,....\ , G_0^D = U\ .$$

Считается, что участники коалиции приобретают активы на интервале времени $0,...,l$, при этом

$$l \le t^1\ ,\ t^1 = \min(t', L) \qquad (1)$$

Здесь t' обозначает момент времени, когда участник коалиции накапливает на интервале времени $0,...,L$ сумму, необходимую для приобретения актива по текущей цене, не прибегая к кредиту. Формально запишем $t' = \min\left(t : t = 0,...,L, G_t^D \geq C\right)$. В этот момент времени платеж считается равным $U' = U - \left(G_{t'}^D - C_{t'}\right)$.

Рассмотрим участника коалиции, который берет кредит и приобретает актив в момент времени τ. Обозначим его задолженность по кредиту в момент времени t через $G_{\tau,t}^C$. При этом возможные значения, которые может принимать τ есть $0,...,t'-1$, если $t^1 = t'$ и $\tau = 0,...,L$, если $t^1 = L$. Динамика этой переменной описывается следующим образом:

$$G_{\tau,t+1}^C = (1+v)\cdot G_{\tau,t}^C - V,\ t = \tau, \tau+1,...,\ G_{\tau,\tau}^D = C_\tau - G_\tau^D.$$

Момент времени, когда участник полностью погасит кредит $t_\tau^2 = \min\left(t : G_{\tau,t}^C \leq 0\right)$.

Поток кредитных платежей участника определим как

$$V_{\tau,t} = 0,\ t = 0,...,\tau-1;\ V_{\tau,t} = V,\ t = \tau,...,t_\tau^2 - 1;\ V_{\tau,t} = V + G_{\tau,t}^C,\ t = t_\tau^2;\ V_{\tau,t} = 0,\ t = t_\tau^2, t_\tau^2 + 1,...\,.$$

Момент времени, когда последний участник коалиции полностью погасит кредит и коалиция прекратит свое функционирование:

$$T = \max_{\tau=0,...,l} t_\tau^2,\ l = 0,...,t'-1,\ t^1 = t' \text{ или } l = 0,...,L,\ t^1 = L;\ T = \max\left(\max_{\tau=0,...,t'-1} t_\tau^2, t'\right),\ l = t',\ t^1 = t'.$$

Пусть n_t – число участников коалиции, которые совершают накопительные платежи в момент времени t, s_t – число участников, которые приобретают актив.

При этом справедливы соотношения

$$n_{t+1} = n_t - s_t,\ t = 0,...,l-1,\ n_0 = N, \tag{2}$$

где N – полное число участников коалиции.

На переменные n_t и s_t накладываются следующие ограничения:

$$n_t > 0,\ n_t \text{ – целое},\ t = 1,...,l;\ s_t \geq 0,\ s_t \text{ – целое},\ t = 0,...,l;\ s_l = n_l \tag{3}$$

Определим поток Q_t денежных средств по всем операция участников коалиции. Этот поток представляется как разность потоков по всем приходным P_t и расходным R_t операциям, т.е. $Q_t = P_t - R_t$, $t = 0,...,T$. Будем записывать: $P_t = P_t^D + P_t^C$, $R_t = R_t^D + R_t^C$, $t = 0,...,T$, где P_t^D – поток денежных средств по приходным операциям коалиции с депозитами участников, P_t^C – поток денежных средств по приходным операциям коалиции с кредитами участников, R_t^D – поток денежных средств по расходным операциям коалиции с депозитами участников, R_t^C – поток денежных средств по расходным операциям коалиции с кредитами участников.

Состояние коалиции характеризуется переменной M_t – суммой денежных средств в кассе коалиции. Состояние изменяется во времени согласно разностному уравнению

$$M_{t+1} = M_t + Q_{t+1},\ t = 0,...,T,\ M_0 = Q_0 \tag{4}$$

Требуется, чтобы эта переменная удовлетворяла ограничениям

$$M_t \geq 0,\ t = 0,...,T \tag{5}$$

В моменты времени $0,...,l$ участники, которые приобретают актив, выбираются путем жребия. Время приобретения актива участником коалиции моделируется случайной величиной η, принимающей значения $0,...,l$ с вероятностями $\mathrm{P}(\eta = t) = s_t / N$, $t = 0,...,l$.

Среднее время приобретения актива участником коалиции

$$\bar{t} = \mathrm{E}\eta = \sum_{t=0}^{l} t \cdot \mathrm{P}(\eta = t) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{l} t \cdot s_t \tag{6}$$

Ставится следующая задача: при заданных основных параметрах задачи U, V, u, v, L, динамике цен C_t, $t = 0,...,T$ найти управления l, s_t, $t = 0,...,l$, удовлетворяющие основным ограничениям задачи (1)–(5) и доставляющие минимум критерию (6).

2. Вычислительные эксперименты

Была проведена серия имитационных экспериментов. Считалось, что кредиты участникам коалиции на приобретение актива выдаются, начиная с начального момента времени, во все те моменты времени, когда в кассе коалиции достаточно денежных средств. Процесс выдачи кредитов заканчивается, как

только последний участник коалиции получает кредит и приобретает актив. Таким образом, управление s_t задавалось в виде синтеза:

$s_0 = \left[P_0 / C_0 \right]$, если $P_0 \ge C_0$; $s_0 = 0$, если $P_0 < C_0$

$s_t = \left[\left(M_{t-1} + P_t \right) / C_t \right]$, если $M_{t-1} + P_t \ge C_t$; $s_t = 0$, если $M_{t-1} + P_t < C_t$,

где $\left[a \right]$ обозначает целую часть a.

Переменные n_t, M_t при этом рассчитывались исходя из уравнений (2) и (4), соответственно. Момент времени, когда последний участник коалиции приобретает актив, определялся как $l = \min\left(\min\left(t : n_t \le 0 \right), t^1 \right)$.

Ниже приведены результаты типового расчета. Были заданы следующие значения параметров: $U = 0.02$, $V = 0.02$, $u^{\%} = 5.$, $v^{\%} = 10.$, $L = 100$, $N = 100$. Цены задавались в виде следующей зависимости $C_{t+1} = \left(1 + \omega\right) \cdot C_t$, $t = 0,1,\ldots$, $C_0 = 1.$, $\omega^{\%} = 5.$. При этом $x = \left(1 + 0.01 \cdot x^{\%}\right)^{1/12} - 1$, где в качестве x может выступать u, v или ω.

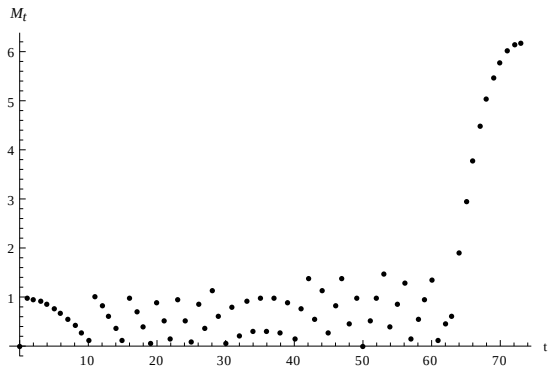


Рис. 1. График зависимости M_t от времени t

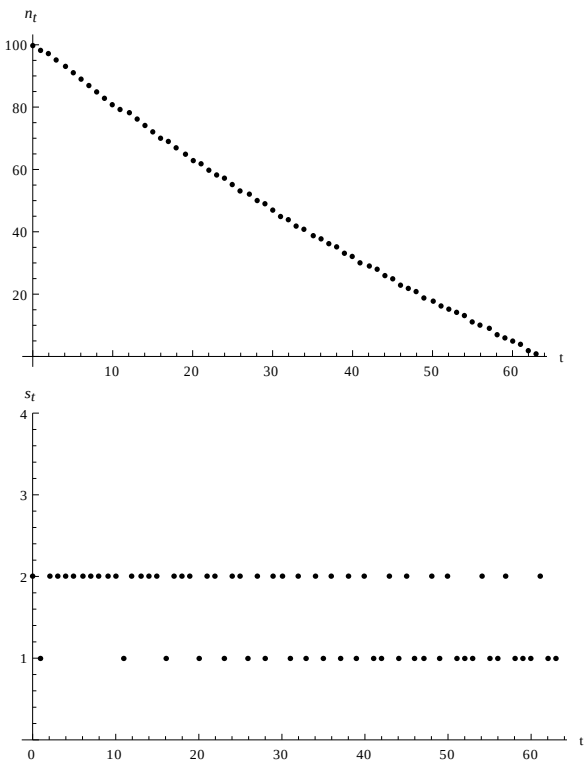


Рис. 2. Графики зависимостей n_t, s_t от времени t

В данном примере были рассчитаны: $t^1 = 78$, $l = 63$, $T = 73$, $\bar{t} = 28.94$.

Список литературы

1. *Гасанов И.И., Ерешко Ф.И.* Моделирование ипотечных механизмов с самофинансированием // В серии "Сообщения по прикладной математике". М.: ВЦ РАН, 2007. 62 с.

2. *Beasley T., Coate S., Loury G.* The Economics of Rotating Savings and Credit Associations // The American Economic Review. 1993. Vol. 83. No. 4, 792-810.

Исследование операций в страховании и риск-менеджменте

1. *O.B. Shonia, I.I. Kartvelishvili, L.G. Bejanishvili* Basic Models of Handwritten Symbols 118
2. *O. Shonia, N. Tsomaia* Information Security Method (Authentication Methods) Used for Banking System 119
3. *В.Г. Киселев* Процедура формирования программ агрострахования 122

Basic Models of Handwritten Symbols

O.B. Shonia, I.I. Kartvelishvili, L.G. Bejanishvili

Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia

Abstract

The paper represents creation of basic models for original and unknown handwritten symbols, which is one of the stages if identification of handwritten symbols. The processes of creation of models are formed in stages, where each of them is characterized based on its functional role.

Key words: reference, basic, weighed.

Introduction

For the bases of original and unknown symbols, after completion of clusterization process, reference description will be found for each group, which could be referred to as basic model. Teaching process, as multi-step process, is required for creation of basic model. Marginal values shall be selected for each group and then the best representations shall be grouped in sub-groups. Within this model, interim link shall be created, where the representations could be found, which may cause bigger number of errors in the process of identification, than in the case of actual identification. The final step is exclusion of bad representations, i.e. cleaning of the link of interim exemplary representations. Classified representations are obtained when the obtained distance is less than the margin of other class, rather than that of the class under consideration.

Basic Section

During assessment of margins of identification, the following most important issue arises: to exclude bad representations from the root of reference representations. For this purpose, the number of classified representations and errors made shall be calculated. The reference shall be usable if is allows identification of unknown symbols. If the set of reference representations contains bad references, it negatively affects the margins, reduced them and the process is completed with low reliability of identification.

The process of primary selection is as follows: we've selected the given number of representations by identification and called it a reference.

On the one hand, two problems still persist. The first one is that the set of selected references might not contain all possible styles of the presented manuscripts. This problem could be considered an easy one, if, simply, big number of references are used and we consider that those models are referential. But it leads to another problem, which is that the size of reference set is limited.

For the purpose of solving of the above mentioned problem, characteristic value of the groups shall be used. The following parameter is defined from each group: arithmetic mean is the group, which characterizes this group and around which the elements of the group are concentrated.

The groups of handwritten symbols are characterized by the distances from the center of gravity of the representation to reference points, which represent *D* value of *n* volume, defined according to certain features and unify, according to the same features, empiric group of *k* quantity with $n_1, n_2, ..., n_k$ volumes, where *k* is the number of reference points. Two types of sets of *n* volume are obtained, which, based on division into groups of *k* quantity, could be represented in the following form:

$$\overbrace{d_1, d_1, ..., d_1}^{n_1} \qquad \overbrace{d_2, d_2, ..., d_2}^{n_2} \qquad \overbrace{d_k, d_k, ..., d_k}^{n_k} \tag{1}$$

Where n_i is the quantity of d_i distances, $i = \overline{1,k}$

$$d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, ..., d_{n_1}^{(1)}, \qquad d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, ..., d_{n_2}^{(2)}, \qquad d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, ..., d_{n_k}^{(k)} \tag{2}$$

Where $\{d_j^{(i)}\}$ is the unity of distances from the center of gravity of *I* symbol of the group to the reference points and $j = \overline{1, n_i}$.

For both series, the corresponding frequencies will be: $n_1, n_2, ..., n_k$.

Frequencies of occurrences: $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, ..., \frac{n_k}{n}$ and volume: $n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$

Individual arithmetical means $\overline{D_1}, \overline{D_2}, ..., \overline{D_k}$ are defined for the (2) series:

$$\overline{D_1} = \frac{d_1^{(1)} + d_2^{(1)} + ... + d_{n_1}^{(1)}}{n_1}; \quad \overline{D_2} = \frac{d_1^{(2)} + d_2^{(2)} + ... + d_{n_2}^{(2)}}{n_2}; \quad \overline{D_k} = \frac{d_1^{(k)} + d_2^{(k)} + ... + d_{n_k}^{(k)}}{n_k} \qquad (3)$$

Whereof:

$$d_1^{(1)} + d_2^{(1)} + ... + d_{n_1}^{(1)} = \overline{D_1} \cdot n_1, \qquad d_1^{(2)} + d_2^{(2)} + ... + d_{n_2}^{(2)} = \overline{D_2} \cdot n_2, \ \ldots$$

$$d_1^{(k)} + d_2^{(k)} + ... + d_{n_k}^{(k)} = \overline{D_k} \cdot n_k; \qquad (4)$$

In this case average of (2) series will be:

$$\overline{D} = \frac{d_1^{(1)} + d_2^{(1)} + ... + d_{n_1}^{(1)} + d_1^{(2)} + d_2^{(2)} + ... + d_{n_2}^{(2)} + ... + d_1^{(k)} + d_2^{(k)} + ... + d_{n_k}^{(k)}}{n_1 + n_2 + ... + n_k} \qquad (5)$$

Where, in the case of insertion of their values instead of individual sums, we'll obtain:

$$\overline{D} = \frac{\overline{D_1} \cdot n_1 + \overline{D_2} \cdot n_2 + ... + \overline{D_k} \cdot n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \overline{D_i} \cdot n_i \qquad (6)$$

The value, defined by (6) is $\overline{D}$ empiric (static) weighted average of empiric (static) values of D value, which is calculated for each group of both bases and represents characteristic feature of cluster, according to which comparison of original and unknown symbols based on groups will be possible.

Conclusion

Creation of basic models for original and unknown handwritten symbols, which is one of the stages of identification of handwritten symbols, is required for successful solving of comparing and identification process.

References

1. *P. Scattolin* Recognition of Handwritten Numerals Using Elastic Matching. The Department of Computer Science. November 1995.

Information Security Method (Authentication Methods) Used for Banking System

O. Shonia, N. Tsomaia

Abstract

Banks are storehouses of personal identifiable information. With identity theft on the rise, these organizations must take information security very seriously. There are multiple ways that banks can authenticate users–that is, make sure they are who they say they are. These methods range from username and password combinations to iris scanning. As technology continues to change, banks must adapt their security systems to effectively combat hackers and thieves. Selecting the right technologies for each organization cannot be generalized. However, knowing what authentication techniques are available is the first step in maintaining a secure environment. This paper gives insight into some of the more prevalent technologies currently being implemented in large organizations today.

Key words: authentication, physical security, access control, usernames and passwords, PIN

Introduction

Authentication is defined as "… the process by which a computer, computer program, or another user attempts to confirm that the computer, computer program, or user from whom the second party has received some communication is, or is not, the claimed first party." (Wikipedia, 2005) In other words, someone has the need to verify that someone else is who they say they are. Authentication can be completed via the use of many different methods. Some of these methods are far superior to others, but are more difficult to implement and fund.

Authentication is not enough to grant users access on its own. Authorization is the next step in the procedure. Authorization is the process by which a computer system or individual grants access to a user for various reasons. The user must first authenticate himself to the system. The system will then check the user's authorization and decide if that user has sufficient access to the resource he is trying to access. Only then will the

system grant the user access to the resource. However, this is still not the end of the process. Accounting must take place too.

Accounting is the process of recording access to a resource. Specifics on the accounting format may vary from system to system, but is a key part of the authentication process. It is always a good idea to know what user is accessing the system and when that user does so. This can aid in investigations if problems appear in the future.

Banks are organizations that must take the authentication process very seriously. Banks are storehouses of critical personal identifiable information. This information may include: social security numbers, physical addresses, phone numbers, email addresses, account numbers, credit histories, employment histories, and other information pertaining to the organization's clients and the employees.

Authentication Methods

Methods for authentication can be organized into a few basic categories. They can be one of several things directly related to the user. Basically, this is something the user knows, something the user possesses, the way the user behaves, or a physical characteristic of the user. The following figure categorizes some of the authentication methods. Note that this is not an exhaustive list.

Categorization of Authentication Methods

User Knows	**User Possesses**	**User Behaviors**	**User's Physical Characteristics**
Password	Swipe Card	Speech	Fingerprint/Palm print
PIN	Proximity Card	Signature	Hand Geometry
Identifiable Picture	USB Token	Keyboarding Rhythm	Iris Features
	One Time Password		

Information the User Knows

Usernames and Passwords

Probably, the most basic form of user authentication is by a username password combination. This type of authentication is extremely weak. More and more problems are occurring with its use. The idea here is that a user possesses a unique identifier such as an employee number. He also has a secret phrase that is paired with the identifier. When the user authenticates, he provides his unique identifier and supplies his secret password. Since the user is the only one who is supposed to know the secret password, he is authenticated and is the person he says he is.

Using passwords for authentication is the simple idea. Assign a unique identifier to a user and instruct that user to supply a password to correlate to that identifier. Administration is also pretty simple. Almost all computer systems have built-in applications to handle passwords. The user identifiers and passwords can be stored in a database allowing the entire process to be completed with the user as the only source of human input.

Surely many problems can be identified with this technique. Username and password combinations have a fundamental flaw stemming from human psychology. Passwords should be easy to remember and be easy enough to provide swift authentication. On the other hand, in terms of security the password should be difficult to guess, changed from time to time, and unique to a single account. (Wiedenbeck, 2005) Because of these requirements, many people feel the need to physically record their password (often times in close proximity to the authentication device). Furthermore, as technology increases, attacks targeting passwords are becoming easier to implement. High powered computers make it quite efficient to initiate dictionary and brute force attacks to obtain the password.

Passwords are highly susceptible to man in the middle attacks and if someone simply watches you enter the code. Since passwords are still vastly implemented in computer systems, there are some best practices for their creation. Passwords should be alphanumeric, meaning that they require both letters and numbers to be valid. They should also have a minimum length. Six characters seem to be a generally accepted minimum but more and more systems are moving to 8 characters minimum. For added security, passwords should also encompass special characters like the asterisk (*), semi-colon (;), or dollar sign ($). Note that many computer systems do not allow special characters in the password. This has held true with online banking computer systems.

PIN

A personal identification number (PIN) can be used in much the same was as a password. It is numerical in format and like a password should be kept secret. The most common use of the PIN is for automatic teller machines (ATM). "Most commonly PINs are 4-digit numbers in the range 0000-9999 resulting in 10,000 possible numbers, so that an attacker would need to guess an average of 5000 times to get the correct PIN." (Personal Identification Number, 2005) This presents a problem, however. If a hacker is trying to guess a PIN, by statistical calculations it will take some time. If a computer does the work, it may take a matter of seconds. This is why most systems implementing a PIN have a lockout feature. If the user or anyone else enters the wrong

PIN more than a predetermined number of times, the user account will be locked until an system administrator reactivates the account. This is usually the case with the previously discussed password system as well.

Identifiable Pictures

A newer form of authentication has emerged promoted by the use of handheld devices (which are not as friendly to user input) and problems surrounding passwords and personal identification numbers. The idea behind using pictures in place of a password or a PIN is that users must recall a password; however, they recognize a picture. This allows the system to show multiple pictures and let the user recognize the correct picture that will provide access to the account. Studies have shown that this method of authentication can reduce the ability of a hacker to guess the correct authentication key and reduce a hacker's ability to record the correct key (since it is a picture). (De Angeli, 2005) Some banks are beginning to integrate pictures as part of their authentication systems.

One-Time Password

Another related method is the one-time password. This is extremely similar to the basic username and password combination except that the password never travels through the public network. RFC 2289 explains one method for accomplishing a one-time password authentication. The system uses a client side generator and a server. Basically, the generator accepts a secret password from the user and concatenates it with information sent from the server in control of the authentication. Various computations and hashes are performed on the user's secret password which can be verified by computations by each end of the communication. This type of system can protect against passive attacks against which basic password systems maybe vulnerable. (RFC 2289 - A One-Time Password System, 1998)

Items the User Possesses

Swipe Card

Anyone interested in modern banking is familiar with the common swipe card. One prime example is the credit card. Swipe cards are small and contain a magnetic strip holding information about the user's identity. This type of authentication can be used in conjunction with other authentication methods such as a PIN. (SafeNet, 1999) The card by itself is not a sufficient means of authentication since it is prone to theft. The data on the card can be duplicated by means of the proper equipment. This means that a third party could possibly create a card with the same information or simply use the information in a different method.

Proximity Card

Proximity cards work in much the same fashion as swipe cards but work from a distance which varies from vender to vender. The card contains information by which to authenticate that the person holding the card is the person who is authorized to access a certain resource or door. That individual simply places the card near the card reader and the information is exchanged wirelessly. The proximity card shares the same problems that magnetic swipe cards do, that is, with the proper equipment, the card can be duplicated or the information can at least be stolen. (He, 2003) These types of cards are used in numerous organizations including universities.

USB Token

The USB tokens are very much like their plastic card counterparts. The token contains information about a user's identity and serves a method for the user to access protected resources. The USB token must be plugged into a computer's USB port so that the computer has access to the information. Often times, software licensing information may be stored on these devices. This makes it easy to account for legal and financial records. As with other authentication items which users possess, USB tokens can be lost, stolen, or broken.

Conclusion

As mentioned earlier, Bank of America has incorporated a new authentication system for online users that takes advantage of a human's ability to recognize pictures. "Instead of the traditional user name-password setup, SiteKey users select one of a thousand different images, write a brief phrase and pick three challenge questions." (Nowell, 2005) Other banks are expected to follow suit. Banks in general are also incorporating various authentication methods to grant access to users. To this date, there is no single best solution for authentication. Multiple layers of authentication have proven to be the most effective.

Multifactor authentication is currently the most complete solution. An example of this would be to use a username and password combination with a proximity card. Another example would be to use both fingerprint and speech authentication. There are many combinations that can be implemented. The deciding factors on which methods to choose are cost, administration time, and ease of use for the users. No matter which methods are implemented, the system should integrate with little effects on the system's users. The authentication should be as seamless as possible.

References

1. Wikipedia, (2005). Retrieved Jul. 04, 2005, from Authentication Web site: http://en.wikipedia.org/wiki/Authentication.

2. Campbell, P., Calvert, B., & Boswell, S. (2003). Security+ Guide to Network Security Fundamentals. Toronto, ON: Thomson.

3. Authentication, (2004). Glossary of Common Biometric Terms. Retrieved Jul. 14, 2005, from Biometric Glossary of Terms Web site:
http://www.biometricsdirect.com/Content/Biometric_Terms.htm.

4. Roland, J. (2004). CCSP Self-study: Securing Cisco IOS networks (SECUR). Indianapolis, IN: Cisco Press.

5. Wikipedia, (2005). Personal identification number. Retrieved Jul. 16, 2005, from http://en.wikipedia.org/wiki/Personal_Identification_Number.

6. De Angeli, A., Coventry L., Johnson G., & Renaud, K. (2005). Is a picture really worth a thousand words? Exploring the feasibility of graphical authentication systems. International Journal of Human-Computer Studies, 63(1-2), 128-152.

Процедура формирования программ агрострахования

В.Г. Киселев

ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

В настоящее время система страхования в сельском хозяйстве нашей страны находится в стадии активного становления – пока по существу только вырабатываются концепции системы страхования и это связано с изменением целей и принципов конструируемого механизма защиты интересов сельскохозяйственных производителей, что, в свою очередь, связано с известными перестроечными процессами в стране.

При выработке приемлемых программ агрострахования необходим всесторонний анализ механизма взаимодействия всех участников страховой операции.

В разработке программы агрострахования участвуют три участника: страховая компания, страхователь – аграрная фирма и государство. У каждой стороны имеются свои интересы, которые можно описать набором критериев. Значения критериев из этого набора определяют свойства каждой программы страхования. Отметим, что некоторые критерии из этого набора противоречивы, поскольку, например, страховая фирма желает максимизировать свой доход, а доход страховой фирмы получается из выплат страхователя. Целью государства является стабилизация сельскохозяйственного производства и, как показывает мировой опыт, без государственных инвестиций реализация агрострахования нереальна.

Из сказанного выше следует, что каждую страховую программу необходимо исследовать всесторонне, привлекая методы системного анализа, в частности методы теории исследования операций анализа многокритериальных задач с неполной информацией (поскольку информация об урожайности является весьма неполной).

Для всех основных видов страхования разработаны методики обоснования страховой политики (фундаментальной публикацией в этой области является переводная монография американских специалистов [1]). Исключение составляет страхование в сельском хозяйстве и особенно в его растениеводческой отрасли. В данной работе предлагается некоторая схема согласования интересов участников операции страхования сельскохозяйственных культур.

Перечислим теперь минимальный набор критериев для оценки программы агрострахования.

Φ_0 – доля участия государства в данной программе,

Φ_1 – средний доход агрофирмы,

Φ_2 – вероятность недополучения запланированного урожая (или, что то же, величина этого запланированного урожая).,

Φ_3 – средний доход страховой компании.

Φ_4 – вероятность неразорения страховой компании, которая, в частности, определяется ее начальным капиталом.

Исходя из значений этих критериев, должен быть достигнут компромисс между аграриями и страховщиком при выборе определенной программы страхования, причем этот компромисс достигается выбором свободных параметров страховой программы.

Свободными параметрами в программе являются:

γ – доля участия государства в страховании – это в тоже время является критерием оценки деятельности государства,

θ – величина страховой надбавки (известный в страховании параметр, обеспечивающий финансовое существование страховой фирмы),

y_α – величина страховой урожайности (по этой величине через функцию распределения однозначно определяется страховая вероятность получения урожая).

В работах [2], [3] для одной очень распространенной программы агрострахования приводятся соответствующие формулы и алгоритмы для вычисления перечисленных критериев.

Используя эти результаты, можно построить следующую итерационную процедуру согласования интересов всех участников. Государство назначает величину γ. Страховая компания выбирает величину страховой надбавки θ, от которой зависит её доход, и назначает величину страхового тарифа в зависимости от величины страховой урожайности y_α (как связаны функционально эти величины, показано в [2]). Сейчас для y_α задается единственное значение, хотя естественно оперировать функциональной зависимостью величины страхового тарифа от величины страховой урожайности. Исходя из этих данных страхователь (агрофирма) решает вопрос о целесообразности страхования культуры на некоторой площади S со страховой урожайностью y_α. Зная это значение S, страховщик вычисляет свои экономические характеристики и в случае необходимости может скорректировать свои амбиции, выражаемые параметром θ. Если и это не дает желаемого результата, страховщик должен обратиться наверх с просьбой увеличения параметра γ. Такая процедура позволит найти решение, если компромисс возможен. То, что это не всегда возможно, подтверждает тот факт, что во всех странах участие в агрострахования обязательно, а если государство не заинтересовано в стабилизации сельскохозяйственного производства, то и агрострахование невозможно.

Список литературы

1. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Дж.* Актуарная математика, М.: Янус-К, 2001. 655 с.

2. *Киселев В.Г.* Системный анализ основных систем агрострахования. М.:ВЦ РАН. 2012. 28 с.

3. *Киселев В.Г.* Актуарная математика в агрострахования. М.: ВЦ РАН. 2011. 29 с.

Исследование операций в медицине, биологии и экологии

1. *А.А. Белолипецкий, В.Ф. Галанжа* Задача определения рационального срока эксплуатации парка машин 124
2. *А.А. Белолипецкий, К.О. Семенов* Математическая модель заполнения однослойных оболочек газом как сингулярно возмущенная задача смешанного типа для уравнения диффузии 126
3. *Н.В. Белотелов, И.А. Коноваленко* Индивидуально-ориентированная модель «ресурс – потребитель» с учетом коллективного поведения особей 127
4. *А.Н. Герасимов, М.И. Шпитонков* Зависимость смертности пожилого населения от заболеваемости гриппом и другими инфекциями 128
5. *Г.В. Зибров, В.М. Умывакин, А.В. Швец* Квалиметрическая модель интегральной оценки экологической опасности территорий природно-технических систем 129
6. *М.Г. Крейнес, А.А. Афонин* Семантическая категоризация текстов на естественных языках без знания семантики 132
7. *М.Г. Крейнес, А.А. Афонин, Е.М. Крейнес* Объективность или магия чисел 133
8. *В.Н. Разжевайкин* О существовании лидера в диффузионной модели конкуренции 135

Задача определения рационального срока эксплуатации парка машин

А.А. Белолипецкий, В.Ф. Галанжа

Вычислительный центр РАН им. А.А.Дородницына, Москва

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград

Аннотация

В настоящем докладе предложен подход в задаче обновления парка машин. Используются язык и понятия, принятые в актуарной математике [1], из них основными являются случайные величины длин межремонтных периодов [2-8]. Предложены подходы к решению задачи о нецелесообразности использования машины после определенного срока эксплуатации.

Временем жизни машины назовем срок ее активной эксплуатации без учета простоев. Условную единицу измерения времени назовем часом. Пусть $\Theta_i, i=\overline{1,N}, \Theta_0=0$, случайные времена активной работы машины с момента начала ее эксплуатации, в которые машине требуется ремонт (акт восстановления машины в рабочее состояние). Случайные величины $X_i=\Theta_i-\Theta_{i-1}, i=\overline{1,N}$, назовем *межремонтными периодами (МРП)*. Предполагается, что значение величины X_i зависит лишь от номера i межремонтного периода и не зависит от предыстории ремонтов.

Пусть $U(N)$ средний доход (без учета затрат) в единицу времени, который получает предприятие при эксплуатации машины в течение N межремонтных периодов. Один из возможных ее видов следующий:

$$U(N)=\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad (1)$$

где p_i (руб/час)- доход, получаемый предприятием от эксплуатации машины в течение единицы времени (час) в i - м МРП, $m_i=M[X_i]$ - средняя длительность i -го МРП.

Обозначим l_0^i количество машин, только что прошедших i ремонтов и эксплуатируемых в i -м *МРП*. Пусть T_i - случайное чистое время безотказной работы машины в i - МРП. *Считаем, что вероятностные функции безотказной работы* $s_i(t)=\Pr(T_i>t)$ *у всех машин одинаковые.* В процессе эксплуатации эти машины выходят из строя и требуют очередного ремонта. Пусть L_x^i - количество машин, «оставшихся в строю» после x часов их *чистого* времени работы. L_x^i есть случайная величина. Введем для каждой наблюдаемой машины с номером $n=1,2,...l_0^i$ индикаторную функцию $I_n^i(x)$, которая равна 1, если после x часов *чистого* времени работы этой машины она не потребовала ремонта, и равна

нулю в противном случае. Очевидно, что $L_x^i = \sum_{n=1}^{l_0^i} I_n^i(x)$. Нетрудно видеть, что математическое ожидание случайной величины L_x^i равно $l_x^i = M[L_x^i] = M\left[\sum_{n=1}^{l_0^i} I_n^i(x)\right]$. Но $M[I_n^i(x)] = s_i(x)$, поэтому $l_x^i = l_0^i \cdot s_i(x)$. Таким образом, l_x^i - это среднее количество машин из l_0^i наблюдаемых, которые в процессе эксплуатации на i-м *МРП* не потребовали очередного ремонта после x часов *чистого* времени их работы. В работе [2] методами актуарной математики показано, что *средние округленные* значения длин МРП m_i вычисляются по формулам $m_i = \frac{1}{l_0^i}\sum_{k=1}^{\infty} l_k^i$ *(ед. времени).*

Себестоимость единицы работы машины определим по формуле

$$Z(N) = \frac{S + \sum_{i=1}^{N}(E_i m_i + R_i)}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \text{руб/час}, \qquad (2)$$

где S - стоимость приобретения машины без ее ликвидационной стоимости, руб, E_i - затраты по эксплуатации 1 часа работы машины в течение i-го МРП, руб, R_i – стоимость капитального ремонта машины в конце i-го МРП, руб.

Постановка оптимизационной задачи состоит в решении экстремальной задачи о максимизации обобщенной интенсивности прибыли

$$\max_N G(N), \qquad (3)$$

$$G(N) = \lambda U(N) - (1-\lambda) Z(N),$$

здесь $\lambda \in [0,1]$ - параметр, определяющий относительную важность функций (1), (2), входящих в критерий (3). В частности, при $\lambda = 0$ задача (3) сводится к поиску минимума $Z(N)$.

Данный метод позволяет на основании имеющейся на предприятиях системы отчетности о работе технологического оборудования определить один из основных параметров управления экономикой эксплуатации технологического оборудования – оптимальное количество ремонтов, после которых следует отказаться от эксплуатации данной машины. Он был опробован на турбобурах - базовых машинах для бурения скважин в РФ.

Список литературы

1. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. *Actuarial Mathematics.* Itaca, Illinois USA: The Society of Actuaries, 1986, 856 p.

2. *Белолипецкий А.А., Галанжа В.Ф.* Экономико - математический анализ процесса старения парка машин. // М: Препринт ВЦ РАН «Сообщения по прикладной математике», 2012, 29 с.

3. *Галанжа В.Ф., Иванов В.П., Плотель С.Г.* Об управлении обеспечением турбинного бурения турбобурами и запасными частями.// Организация и управление нефтяной промышленности, 1981, №5. С. 23-29.

4. *Галанжа В.Ф., Иванов В.П.* Определение зависимости изменения межремонтного периода машины от частоты ремонтов. // Нефтяное хозяйство, 1981, №10. С.10-16.

5. *Селиванов А.И.* Основы теории старения машин. М.: Машиностроение ,1964. 403 с.

6. *Консон А.С.* Экономика ремонта машин. Л. Машиностроение, 1970. 216 с.

7. *Черепанов С.С.* Техническое обслуживание и ремонт машин в сельском хозяйстве. М.: Колос, 1978, 288 с.

8. *Халфин М.А.* Определение межремонтных сроков службы машин в сельском хозяйстве. М.: Колос, 1979, 239 с.

Математическая модель заполнения однослойных оболочек газом как сингулярно возмущенная задача смешанного типа для уравнения диффузии

А.А. Белолипецкий, К.О. Семенов

Вычислительный центр РАН им. А.А.Дородницына, Москва

Аннотация

Изучено решение задачи диффузионного заполнения сферических оболочек газом, возникающей в проблеме производства лазерных мишеней для инерциального термоядерного синтеза [1–3]. Математическая часть проблемы состоит в решении сингулярно возмущенного линейного параболического уравнения с начальными и краевыми условиями. Приведена теорема об асимптотическом решении такой задачи, являющаяся обобщением результатов работы [4].

Рассмотрим однослойную сферическую оболочку, заполняемую газом. Центрально симметричное течение газа через оболочку подчиняется закону Фика

$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\rho}{\partial r}$, где D,ρ -коэффициент диффузии и молярная плотность газа. На внутренней границе при $r=r_1$

$\rho(r_1,t)=\rho_{\text{int}}(t)$, $\rho(r_1,0)=\rho_{\text{int}}(0)=\rho_0$.

Изменение плотности газа в полости описывается уравнением $\frac{d\rho_{\text{int}}}{dt}=\frac{3D}{r_1}\frac{\partial\rho(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$.

На внешней границе при $r=r_0$

$\rho(r_0,t)=\rho_{\text{int}}(t)+\Delta(t)/RT$. Считаем, что состояние газа описывается законом Клапейрона-Менделеева $p=RT\rho$. Здесь R,T,Δ - универсальная газовая постоянная, температура и перепад давлений на внешней и внутренней стенке оболочки.

Начальные условия: $\rho(r,0)=\rho_{\text{i}}(r)$, причем выполнены условия согласования

$\rho_{\text{i}}(r_1)=\rho_0$, $\rho_{\text{i}}(r_0)=\rho_0+\frac{\Delta(0)}{RT}$.

Введем безразмерные пространственные и временные переменные

$x=\frac{r-r_1}{r_0-r_1}$, $r(x)=r_0(1-\delta x)$, где $\delta=\frac{r_0-r_1}{r_0}<<1$, $\tau=\frac{D}{r_0^2}t$.

Обозначим

$u(x,\tau)=\rho(r(x),t(\tau))$, $\mu(\tau)=\rho_{\text{int}}(t(\tau))$,

$f(\tau)=\frac{\Delta(t(\tau))}{RT}$, $b=\rho_0$, $\varepsilon=\delta^2$

В безразмерных переменных вышеприведенная задача примет вид

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{(1-\delta x)^2}\frac{\partial}{\partial x}(1-\delta x)^2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

Граничные условия:

При $x=1$ $u(1,\tau)=\mu(\tau)$, $u(1,0)=\mu(0)=b$, $\frac{d\mu}{d\tau}=-\alpha\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=1}$, $\alpha=\frac{3r_0}{\delta r_1}$ (2)

При $x=0$

$$u(0,\tau)=\mu(\tau)+f(\tau) \tag{3}$$

Начальные условия:

$$u(x,0)=\rho_{\text{i}}(r(x))=U(x), \tag{4}$$

причем выполнены условия согласования

$U(1)=b$, $U(0)=b+f(0)$.

Справедлива

<u>ТЕОРЕМА.</u> *Решение начально – краевой задачи (1)-(4) существует и имеет вид*

$$u(x,\tau)=\mu(\tau)+\frac{(1-x)}{(1-\delta x)}f(\tau)+\frac{1}{(1-\delta x)}\left[v_s\left(x,\frac{\tau}{\varepsilon}\right)+\varepsilon w\left(x,\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right],$$

где

$$v_s\left(x,\frac{\tau}{\varepsilon}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp\left(-\frac{\pi^2n^2\tau}{\varepsilon}\right)\sin(\pi nx)\text{, а}$$

$$c_n=\frac{2\delta}{\pi^2n^2}\int_0^1[xU''(x)+2U'(x)]\sin(\pi nx)dx\,,$$

$$\mu(\tau)=b+\frac{\alpha}{1-\delta}\int_0^{\tau}f(s)ds+\varepsilon\,\mathrm{M}\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\varepsilon\right).$$

Функция $v_s\left(x,\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ *компенсирует невязку в начальных условиях и быстро убывает до нуля с возрастанием* τ *. Функции* M, w *равномерно ограничены.*

<u>Следствие</u>. При $\frac{\tau}{\varepsilon}\to+\infty$ *решение*

$$u(x,\tau)\to b+\frac{\alpha}{1-\delta}\int_0^{\tau}f(s)ds+\frac{(1-x)}{(1-\delta x)}f(\tau)\,,$$

т.е. быстро «забывает» начальные условия.

Список литературы

1. *Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Корешева Е.Р. и др.* Криогенные мишени для реактора. Ч.1. М.: Препринт ФИАН №4, 2012. С1-134.

2. *Aleksandrova I.V., Belolipetskiy A.A.* Mathematical models for filling polymer shells with a real gas fuel // J. Laser and Particle Beams .1999, v.17, N 4, p.701-712.

3. *Белолипецкий А.А., Семенов К.О.* Исследование математической модели заполнения двухслойных пористых оболочек газом // Вестник МГУ, серия 15, вычисл. матем. и кибернетика. 2011, №4, С.3-10.

4. *Белолипецкий А.А., Тер-Крикоров А.М.* О решении одной сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения // Труды МФТИ, 2011, Том 3, №1, С.14-17.

Индивидуально-ориентированная модель «ресурс – потребитель» с учетом коллективного поведения особей

Н.В.Белотелов, И.А.Коноваленко

Учреждение российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, МФТИ, Москва. Россия

Одной из важнейших задач популяционной экологии является моделирование пространственно временной динамики популяции на основании характеристик отдельных особей. Существует целый ряд работ, так называемые индивидуально ориентированные модели, в которых авторы числено моделируют динамику популяции, например gap –модели лесной растительности [1] . В данной работе мы, исходя из некоторых упрощенных эколого – физиологических представлений об энергетическом балансе особи с учетом возрастных особенностей, а также с учетом коллективного поведения особей, с помощью имитационного моделирования исследуем некоторых аспекты пространственно временной динамики популяции.

Описание модели.

Рассматривается целочисленная решетка $(i=1,...,L,\ j=1,...,F)$, на который равномерно произрастает ресурс (трава). Уравнение роста ресурса имеют вид:

$m^{i,j}{}_{t+1}=m^{i,j}{}_t+K-\theta_t$, если $m^{i,j}{}_t<H$ и $m^{i,j}{}_t=H$, если $m^{i,j}{}_t\geq H$,

где $m^{i,j}{}_t$ - текущее количество ресурса в точке (i,j), K - скорость роста травы, H - максимальное возможное количество ресурса., а θ_t - доля изъятия ресурсом особью, если она есть в точке (i,j)

На этой решетке находится некоторое множество подвижных особей, которые потребляют ресурс, размножаются и могут перемещаться из узла в узел. Считается, что особь имеет возраст (τ). Гибель особи определяется условием недостатка «энергии» (ресурса) $(n_\tau\leq 0)$, который необходим для поддержания затрат на основной метаболизм. Считается, что с возрастом, потребление ресурса

уменьшается. $\theta = n_\tau * C_1(1-\frac{\tau}{T})(1-\frac{n_\tau}{N})$, где C_1, T, N - некоторые постоянные. По достижении определенного размера особь случайным образом делится (процесс рождения), при этом теряется часть «энергии». Перемещение особи определяется «длиной прыжка» (S) за один временной такт и при этом теряется часть «энергии», имеющейся у особи. Особь характеризуется способностью «видеть» ресурс на расстоянии радиуса обзора (R). Направление движения особи определяется расположением ближайшего узла, в котором есть ресурс.

Уравнение баланса «энергии» особи имеет вид:

$$n_{\tau+1} = n_\tau * C_1(1-\frac{\tau}{T})(1-\frac{n_\tau}{N}) - C_2 n_\tau S - \alpha n_\tau^{\beta} - \lambda \frac{n_\tau}{2},$$

где $C_2 n_\tau S$ - затраты на перемещение; αn_τ^{β} - основной метаболизм; $\lambda \frac{n_\tau}{2}$ - затраты на рождение ($\lambda = 1$ – происходит рождение в момент времени t, в противном случае $\lambda = 0$). В модели считается , что рождение происходит в среднем один раз за некоторый период времени.

При описании взаимодействия между особями рассматриваются несколько стратегий поведения животных – притяжение к другим особям и отталкивание от них в зависимости: от взаимного расстояния между ними, от соотношения возрастов и масс между особями. Рассмотрены несколько алгоритмов коллективного поведения.

Получены различные динамические режимы пространственно временной динамики популяции – полное перемешивание, образование кластеров – стад, пульсирующие и волновые режимы. Проведено численное параметрическое исследование полученных режимов

Список литературы

1. *A Shugart H.Y.* A Theory of the Forest Dynamics. Springer, New York, 1984
2. *A. South.* Extrapolating from individual movement behaviour to population spacing patterns in a ranging mammal. Ecological Modelling, 117, 1999, 343-360 p
3. *R.Mac Nally.* Modelling confinement experiments in community ecology: differential mobility among competitors. Ecological Modelling, 129, 2000, 65-85 .
4. *Шмидт-Ниельсон К.* Размеры животных: Почему они так важны? М.: Мир. 1987

Зависимость смертности пожилого населения от заболеваемости гриппом и другими инфекциями*

А.Н. Герасимов[1], М.И. Шпитонков[2]

[1]Первый МГМУ им. И.М.Сеченова, Москва, Россия

[2]ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, Москва, Россия

В эпидемиологии одна из стандартных проблем – выяснить, является ли данное заболевание инфекционным или нет, в том числе, не вносит ли в ее патогенез свой вклад какой-либо инфекционный агент. В частности, одна из активно обсуждаемых в современной эпидемиологии проблем – вносит ли грипп свой вклад в смертность от сердечно-сосудистой патологии у пожилого населения. По отработанным схемам анализа заболеваемости и смертности это сделать достаточно сложно, так как такие особенности заболеваемости, как неоднородность по времени, территориям, возрастам и группам характерны как для инфекционной, так и неинфекционной заболеваемости.

Для инфекционной заболеваемости отдельные случаи заболевания не являются независимыми, что, в частности, увеличивает дисперсию заболеваемости. С другой стороны, только по увеличению дисперсии по сравнению с ожидаемой отделить инфекционную заболеваемость от неинфекционной нельзя, так как увеличение дисперсии заболеваемости может вызвать и колебания риска заболевания, связанные с изменениями условий.

Другая особенность инфекционной заболеваемости – зависимость отклонений от средней заболеваемости. На близких временных промежутках отклонения положительно связаны, так как увеличение числа инфицированных вызывает увеличение риска инфицирования в данный момент, а оно – увеличение ожидаемого количества инфицированных в следующий момент времени. С другой стороны, отклонения заболеваемости на больших временных промежутках могут быть связаны уже и отрицательно, так как увеличение числа инфицированных вызывает увеличение коллективного

* Работа выполнена при поддержке РФФИ. Код проекта №12-07-00789.

иммунного статуса и уменьшение доли восприимчивых, а оно, в свою очередь, вызывает постепенное падение заболеваемости.

В современном анализе динамики временных рядов используются такие показатели как автокорреляционная функция, корреляционная размерность ряда, показатель Херста, показатели Ляпунова и т.д. [2]. Однако для их применения требуются достаточно длинные временные ряды, значительно большие, чем обычная длина временных рядов в эпидемиологии.

В данной работе мы использовали отношение размахов заболеваемости при увеличении шага по времени, что достаточно близко к расчету показателя Херста [2], а статистическую достоверность полученных отклонений оценивали при помощи метода Монте-Карло.

В результате анализа помесячных данных о числе умерших от различных групп патологий в г. Москве в 1999-2005 г.г. среди лиц 60 лет и старше было показано, что в этих группах эффект возрастания размаха более выражен, чем для смертности в целом, однако, дальнейшего возрастания отношения размахов при уменьшении возрастных групп не происходит [1]. Такая картина характерна для смертности, ассоциированной с разными инфекционными заболеваниями, причем разные возраста с разной относительной интенсивностью подвержены ими.

Список литературы

1. *Герасимов А.Н., Шпитонков М.И.* Смертность пожилого населения и связь с заболеваемостью гриппом. // Исследование операций (модели, системы, решения). М: ВЦ РАН, 2008, С. 119-128.

2. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. М.: Мир, 2000.

Квалиметрическая модель интегральной оценки экологической опасности территорий природно-технических систем

Г.В. Зибров, В.М. Умывакин, А.В. Швец

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина» (г. Воронеж)

В настоящее время актуальной проблемой является интегральная оценка качества / некачественности окружающей среды в категориях экологической безопасности / опасности территорий природно-технических систем (ПТС).

Далее под экологической опасностью нами понимается возможность (в частности, вероятность) потери качества (деградации) территорий ПТС в результате неконтролируемой антропогенной деятельности. При этом качество территорий оценивается как относительно экологических требований (норм), так и с точки зрения их природно-хозяйственной значимости, и рассматривается как иерархическая система частных свойств ПТС. На нижнем уровне иерархической структуры («дерева свойств») качество территорий описывается определенным набором частных показателей качества (ПК).

В квалиметрической практике в основном используются следующие интегральные оценки качества сложных ПТС типа средних величин (табл.1): аддитивная (средневзвешенная арифметическая) и мультипликативная (средневзвешенная геометрическая).

Вид среднего взвешенного	Формула	Функция $\varphi(d_j)$	Функция $\varphi^{-1}(d_j)$
арифметическое	$d_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_j$	$\phi(d_j) = d_j$	$\phi^{-1}(d_j) = d_j$
геометрическое	$d_g = \prod_{j=1}^{m} d_j^{\lambda_j}$	$\phi(d_j) = \ln(d_j)$	$\phi^{-1}(d_j) = e^{d_j}$
квазигеометрическое	$d = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1-d_j)^{\lambda_j}$	$\phi(d_j) = -\ln(1-d_j)$	$\phi^{-1}(d_j) = 1 - e^{-d_j}$

Таблица 1 Виды средневзвешенных величин – интегральных оценок качества ПТС.
Примечание: действительные числа d_j принимают значения из интервала (0, 1).

В табл.1 через d_j обозначена j-я частная относительная оценка некачественности (экологической опасности) территорий ПТС по j-му частному ПК. Их весовые коэффициенты λ_j удовлетворяют условию:

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\,,\ j=1,2,\ldots, m; \qquad (1)$$

Например, в работе [1] оценками d_j являются нелинейные экспоненциальные функции желательности

$$d_j(z_j)=[\exp(-\exp(-z_j))], \qquad (2)$$

где z_j – нормированное значение j-го ПК.

Покажем, что интегральная оценка d является средневзвешенным «квазигеометрическим» в смысле ассоциативного среднего по А.Н. Колмогорову [2]. Данная величина вычисляется по формуле:

$$f(d_1, d_2, ..., d_m) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{m}\phi(d_1) + \frac{1}{m}\phi(d_2) + ... + \frac{1}{m}\phi(d_m)\right),$$

где φ – непрерывная строго монотонная функция, а φ^{-1} – функция, обратная к ней.

Тогда средневзвешенная величина есть величина вида $f(d_1, d_2, ..., d_m) = \phi^{-1}\left(\lambda_1\phi(d_1) + \lambda_2\phi(d_2) + ... + \lambda_m\phi(d_m)\right)$, где весовые коэффициенты λ_j удовлетворяют условию (1). При $\varphi(d_j) = d_j$, $\varphi(d_j) = \ln(d_j)$, $\varphi(d_j) = -\ln(1-d_j)$ имеем средневзвешенное арифметическое, геометрическое и «квазигеометрическое» соответственно (табл.1).

Можно показать, что выполняются следующие неравенства:

$$\left[1-\prod_{j=1}^{m}(1-d_j)^{\lambda_j}\right] \geq \sum_{j=1}^{m}\lambda_j d_j \geq \prod_{j=1}^{m} d_j^{\lambda_j}\ .$$

Таким образом, средневзвешенное квазигеометрическое является оценкой сверху для средневзвешенного арифметического и средневзвешенного геометрического. При этом для частных оценок d_j экологической опасности территорий ПТС все средневзвешенные величины (интегральные оценки) принимают значения из интервала [0,1].

Отметим, что аддитивные интегральные оценки и мультипликативные интегральные оценки типа средневзвешенного геометрического не удовлетворяют существенному свойству «ограниченной компенсации», т.е. условию невозможности улучшения значений некоторых частных оценок за счет компенсации сколь угодно большого снижения качества по другим частным оценкам.

Для построения интегральной оценки d экологической опасности территорий нужно иметь относительные частные оценки по каждому ПК. Обозначим через y_j^i – значение j-го ПК i-й ПТС, а через y_j^* – допустимое значение j-го ПК (нормативное экологическое требование) для всех анализируемых геообъектов. Поставим им в соответствие две безразмерные величины, принимающие значения из интервала [0,1]: $\mu_j^i=\mu_j^i(y_j^i)$ – абсолютную оценку качества по j-му ПК для i-й ПТС и $\varepsilon_j=\varepsilon_j(y^*_j)$ - соответствующий нормативный уровень. Будем считать, что требование к качеству (экологическому состоянию) территорий по j-му ПК для i-й ПТС выполнено, если $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$.

При этом частная относительная оценка d_j^i экологической опасности территорий, как функция величин ε_j и μ_j^i, должна удовлетворять следующим условиям: 1) $0 \leq d_j^i \leq 1$ при $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$; 2) $d_j^i=0$ при $\varepsilon_j=0$, $\mu_j^i>0$ (оценка минимальна, если нет никаких требований к качеству); 3) $d_j^i=0$ при $\mu_j^i=1$ и $\mu_j^i>\varepsilon_j$ (оценка минимальна при «идеальном» качестве независимо от требований); 4) $d_j^i=1$ при $\mu_j^i=\varepsilon_j\neq 0$ (оценка максимальна при предельно низком допустимом качестве).

В работе [3] показано, что при $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$ условиям 1)-4) удовлетворяет частная оценка экологической опасности территории ПТС вида:

$$d_j^i=[\varepsilon_j(1-\mu_j^i)]/[\mu_j^i(1-\varepsilon_j)]. \qquad (3)$$

Данная оценка позволяет измерять условную вероятность события, состоящего в том, что требование к интегральному качеству территорий ПТС не выполняется при выполнении требований к ее качеству по j-му частному ПК.

Проведенное в работе [3] теоретико-математическое обоснование показывает, что требованиям коммутативности (равноценности) и ассоциативности (иерархической одноуровненности) удовлетворяет интегральная оценка вида (операция квазисложения):

$$d=d_1+d_2-d_1d_2=1-(1-d_1)(1-d_2) = d_1 \oplus d_2. \qquad (4)$$

Данная формула совпадает с формулой вероятности суммы независимых событий. Операция квазиумножения на произвольное неотрицательное число λ_j и операция квазиумножения частных оценок имеют следующий вид:

$$\lambda_j \otimes d_j=1-(1-d_j)^{\lambda j}. \qquad (5)$$

$$d=d_1 \otimes d_2=1-\exp\{-\ln[1/(1-d_1)]\ \ln[1/(1-d_2)]\} \qquad (6)$$

В этом случае интегральная оценка экологической опасности территорий ПТС является средневзвешенной квазигеометрической величиной (табл. 1). Чем меньше значение данной интегральной оценки, тем выше качество окружающей природной среды.

В работе [4] для содержательной интерпретации данной оценки предлагается использовать вербально-числовую шкалу Харрингтона (табл. 2).

№ п/п	Содержательное описание градаций	Численное значение
1	очень высокая	(0.8, 1)
2	высокая	(0.63, 0.8]
3	средняя	(0.37, 0.63]
4	низкая	(0.2, 0.37]
5	очень низкая	(0, 0.2]

Таблица 2 – Степень экологической опасности территорий по шкале Харрингтона [1].

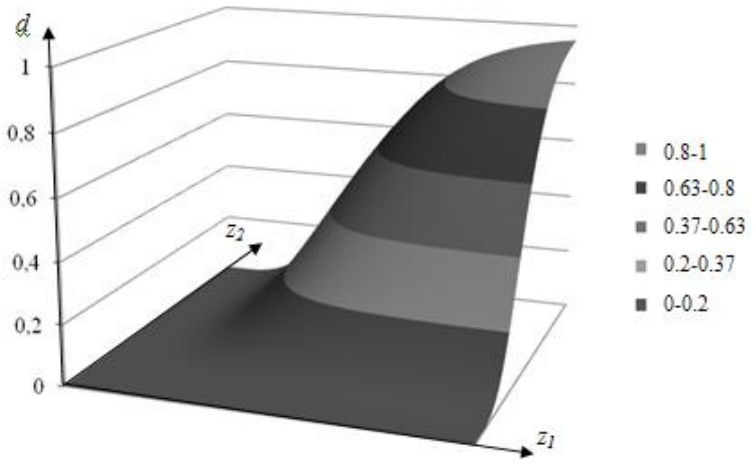


Рис.1. Визуальное представление интегральной оценки эрозионной опасности территорий речных водосборов Воронежской области в шкале Харрингтона.
z_1– нормированный показатель y_1 «смытость почв с площади с.-х. угодий»;
z_2 – нормированный показатель y_2 «густота овражно-балочной сети».

Отметим, что величина d_e=1-1/e ≈ 0.63 является единичным элементом в алгебре оценок экологической опасности (т.к. d_1=1-exp{-ln[1/(1-d_1)]}, то $d_1 \otimes d_e = d_1$).

На рис.1 показаны результаты квалиметрического моделирования интегральной оценки эрозионной опасности территорий речных водосборов бассейна р. Дон в границах Воронежской области.

Для неаддитивной интегральной оценки экологической опасности территорий в классе средневзвешенных величин предлагается использовать средневзвешенное «квазигеометрическое». Данная оценка имеет вероятностную интерпретацию и позволяет квалифицированно измерять качество/некачественность окружающей среды в вербально-числовой шкале Харрингтона.

Список литературы

1. *Harrington E.C.Jr.* The desirability function // Industrial quality control. 1965. Vol. 21, №10. P.494-498.

2. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. 470 с.

3. *Каплинский А.И., Руссман И.Б., Умывакин В.М.* Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-т, 1991. 168 с.

4. *Зибров Г.В., Умывакин В.М., Матвиец Д.А.* Геоэкологическая квалиметрия природно-хозяйственных территориальных систем // Экологические системы и приборы. 2011. №5. С. 3-9.

Семантическая категоризация текстов на естественных языках без знания семантики*

М.Г. Крейнес, А.А. Афонин

ООО «БАЗИСНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ», Москва, Россия

Возможность семантической категоризации текстов на естественных языках, не использующей знаний смысла и значения слов, обсуждается довольно давно (см. многочисленные публикации по латентному семантическому анализу или, например, [1]). Подходы к семантической категоризации, не использующие знаний семантики, основаны на комбинаторных или статистических моделях текстов на естественных языках. При этом, как правило, тексты представляются как частотные словари слов, включенных в текст, или как последовательность знаков (например, букв, которые в рамках формальной процедуры объединяются в устойчивые последовательности). В качестве носителей семантики текста предлагают использовать слова или последовательности знаков, в некотором смысле (например, статистическом или комбинаторном) типичные для конкретного текста. В настоящей работе рассмотрены методы семантической категоризации текстов на естественных языках, основанные на применении информационной технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ® [2,3,4].

В технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ® используется векторная модель представления семантики текста: индивидуальный словарный спектр текста – список слов с весами, характеризующими значимость слова для его содержания и тематики. Веса определяются по результатам вычислений значений оригинального комбинаторного критерия, характеризующего связь пар слов в тексте. Модель обладает свойством самоподобия – при разделении монотематического текста на две части модели семантики частей и текста в целом оказываются близки между собой. На основе моделей семантики отдельных текстов строятся два типа моделей семантики коллекций: групповые и словарные. Групповая модель строится в результате вычислительного решения задачи кластеризации текстовой коллекции – формирования тематически однородных групп текстов в отсутствие априорной информации о наличии и составе таких групп. Для решения задачи кластеризации на основании моделей семантики предложена вычислительно эффективная итеративная процедура, результатом которой является вычисление распределения текстов коллекции по выявленным тематически однородным группам с указанием степени типичности текста для группы [5]. Словарная модель строится как определенное подмножество объединения индивидуальных словарных спектров всех текстов коллекции (см.[3]). Важным шагом при построении словарной модели является ее структуризация, основанная на оценке совместного использования в текстах коллекции входящих в модель слов. В качестве критерия совместного использования применяется комбинаторный критерий, формально аналогичный комбинаторному критерию, характеризующему связь пар слов в тексте. Таким образом, для каждого слова модели определяются его контексты (слова, с которыми слово «закономерно» встречается в документах коллекции). Каждое слово словарной модели получает весовой коэффициент, равный максимальному значению комбинаторного критерия во всех парах, образованных данным словом. Упорядочение слов по данному весовому коэффициенту определяет разделение словарной модели на три группы слов: атомарных семантических детерминант документов выборки, семантических и стилистических детерминант выборки в целом (см. [3]) и позволяет в ходе итерационной процедуры обеспечить требуемую полноту описания коллекции словами, входящими в две первые группы. Под полнотой описания понимается наличие в индивидуальных словарных спектрах требуемой доли документов коллекции хотя бы одного слова из числа атомарных и/или семантических детерминант. По завершении формирования удовлетворяющей требованиям к полноте словарной модели семантики коллекции на основании контекстов входящих в модель слов решается задача структуризации модели: группировки слов модели по признаку близости контекстов. Для вычислительного решения данной задачи используется итеративная процедура, полностью аналогичная процедуре кластеризации текстовой коллекции. В результате получается набор групп слов, каждое из которых характеризуется коэффициентом, определяющим вес (типичность) слова в группе. Набор групп определяет модель семантики текстовой коллекции.

Групповая модель и структурированная словарная модель семантики коллекции являются основой решения задачи семантической категоризации текстов на естественных языках. При использовании групповой модели для текста, который не был включен в процедуру кластеризации, выполняется вычисление его типичности для групп и отнесение к наиболее «типичным» группам. При использовании словарной модели семантическая категоризация основана на вычислении для индивидуального словарного спектра текста сумм минимума из весов слова в спектре и в группе. (Если слова нет в группе,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы», Государственный контракт №14.514.11.4017.

то его вес в группе считается равным нулю). Отнесение текста к семантической группе, связанной с определенной группой слов, выполняется по значению суммы весов.

Приведены результаты семантической категоризации публикаций в журнале Science двумя методами, показывающие их весьма высокую эффективность. Сопоставление результатов для рассмотренных методов показывает преимущества семантической категоризации на основе словарной модели семантики коллекции: необходимы существенно меньшие вычислительны ресурсы при более детальной категоризации.

В рамках предложенного подхода задачи, связанные с содержательной интерпретацией тематических категорий, должен решать пользователь. Вычислительная система только предоставляет материал для размышлений и интерпретации. Замечательно, что в результате решения компьютером задач, которые очень трудно решить человеку (комбинаторные задачи со многими десятками тысяч переменных), возникает ориентированная на творческое решение человеком задача поиска адекватного имени для вполне обозримого множества связанных объектов – слов. Семантика не является необходимой для категоризации. Знание значения слов и опыт их использования необходимы для интерпретации результатов категоризации.

Список литературы

1. *Damashek M.* Gauging Similarity with n-Grams: Language-Independent Categorization of Text // Science. 1995. Vol. 267. № 5199. P. 843-848.

2. *Крейнес М.Г.* Модели и технологии извлечения агрегированных знаний для управления процессами поиска неструктурированной информации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С.114-124.

3. *Крейнес М.Г.* Модель текстовой коллекции для поиска информации на естественных языках: ключевые слова, их связи и контексты // VI Московская международная конференция по исследованию операций. Труды. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 150–151.

4. *Крейнес М.Г.* Информационная технология КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ®: функции, возможности, приложения // Речевые технологии. 2009. № 4. С. 97-106. (http://speechtechnology.ru/files/4-2009.pdf).

5. *Крейнес М.Г., Афонин А.А.* Кластеризация текстовых коллекций: помощь при содержательном поиске и аналитический инструмент // Интернет-порталы: содержание и технологии. Выпуск 4. М.: Просвещение, 2007. С. 510-537.

Объективность или магия чисел*

М.Г. Крейнес, А.А. Афонин, Е.М. Крейнес

ООО «БАЗИСНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ», Москва, Россия

Во многих областях теоретической и прикладной науки актуальны проблемы интерпретируемости и определения адекватности количественных оценок в задачах, традиционно не имеющих моделей, ориентированных на формальные методы анализа (например, для задач поиска текстовой информации см. [1]). На основе конкретной информационной технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ®, разработанной для построения и использования для содержательного поиска информации моделей семантики текстов на естественных языках и их коллекций [2,3,4], были предложены количественные показатели и вычислительный способ оценки качества научных текстов [5]. На примере данного подхода и реализующего его метода рассмотрен принципиальный вопрос о характере и адекватности вычисляемых оценок в задачах, не имеющих моделей, которые позволили бы получить формальное обоснование применяемых методов.

Предложенные количественные показатели (характеризующие значимость, информативность, обоснованность и содержательную независимость научных текстов) и способ их расчета используют формируемые вычислительно модели семантики конкретного документа и модели семантики узкой и широкой предметных областей, к которым относится документ. Узкая и широкая предметная области трактуются как коллекции документов, получаемые в результате решения определенных формальных задач поиска и анализа неструктурированных текстов. При этом принимается предположение об авторитетности и в некотором смысле полноте множества документов, среди которых выполняется поиск. В случаях, когда такое множество документов упорядочено по времени создания (или публикации), возможно в явном виде (в форме коллекций документов, соответствующих конкретному временному интервалу) определить динамику изменений предметной области и рассчитать модели

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы», Государственный контракт №14.514.11.4017.

семантики для каждой такой коллекции. Это позволяет исследовать изменения количественных показателей значимости, информативности, обоснованности и содержательной самостоятельности научного текста для предметных областей, соответствующих различным временным интервалам.

Основной предмет обсуждения – способы обоснования адекватности количественных оценок или явной демонстрации их неадекватности при отсутствии возможности использовать дедуктивные методы. Применительно к рассматриваемой задаче речь идет об адекватности введенных количественных показателей и о возможности их разумной содержательной интерпретации. Попытки решить подобные задачи с помощью привлечения экспертов имеют ряд существенных недостатков. Начиная с возможной необъективности или недостаточной компетентности эксперта до принципиальной проблематичности самостоятельного формирования экспертом количественной оценки традиционно качественного показателя (см. [1]). В последнем случае может оказаться, что эксперт ориентируется на вычисленное значение (неважно, как на образ истины или как на явную ошибку), что делает усилия организаторов эксперимента и эксперта полностью бессмысленными. Поэтому необходимы альтернативные способы оценки адекватности количественных показателей и возможности их разумной содержательной интерпретации. Предложенный в данной работе подход основан на анализе динамики поведения вычисленных оценок конкретных документов во времени. Для научных публикаций такой подход представляется естественным. Как правило, научная тематика возникает в определенное время и в определенное время устаревает. Для нас это означает, что если взять документы широкой предметной области, то показатели, характеризующие значимость, новизну и независимость конкретной публикации до момента распространения соответствующей тематики будут высоки, а по мере роста популярности тематики могут существенно снижаться. Интерес представляет и поведение введенных показателей качества при явном устаревании научной тематики. По существу, предлагается для обоснования количественного подхода использовать соответствие получаемых результатов предсказаниям некоторой независимой качественной модели, не имеющей практически ничего общего с анализируемыми конструкциями и способами их вычислительного построения.

Анализ динамики поведения показателей качества научных публикаций проводился на основании результатов экспериментов с коллекцией публикаций в авторитетнейшем научном журнале Science за период от возникновения журнала (1880 г.) до 1996 г. (более 160000 публикаций). Все публикации были поделены на группы по десятилетиям – опубликованные с 1880 г. по 1889 г, с 1890 г. по 1899 г., с 1900 г. по 1909 г. и так далее. Последнюю по времени группу составили тексты, опубликованные с 1990 г. по 1996 г. Для всех документов коллекции были с использованием технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ® вычислительно сформированы словарные модели семантики в виде списков слов с весами, характеризующими значимость слова для представления тематики и содержания каждого текста. Эксперименты были организованы следующим образом. В коллекции экспертами были выбраны статьи значительного объема (не менее 20 Кбайт в текстовом формате), опубликованные в разное время и представляющие различную тематику. Для каждой отобранной статьи средствами технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ® во всем массиве текстов вычислительно формировалась и анализировалась выборка содержательно связанных публикаций, представляющих узкую предметную область анализируемой статьи. Результатом анализа каждой сформированной выборки была модель ее семантики в виде трех групп слов: атомарных семантических детерминант документов выборки, семантических и стилистических детерминант выборки в целом (см. [3, 5]). Последняя группа слов использовалась в качестве модели семантики широкой предметной области, соответствующей анализируемой статье. Документы, представляющие широкую предметную область анализируемого текста для каждого выделенного временного периода опубликования, определялись при решении задачи поиска средствами технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ®. Запросом на поиск являлись любые три слова из множества стилистических детерминант коллекции, представляющей узкую предметную область. В результаты поиска включались все документы, в словарные модели семантики которых включены все три слова хотя бы одного из запросов. Для сформированной коллекции документов широкой предметной области формировалась средствами технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ® модель семантики. Для каждого анализируемого текста и для каждого десятилетия жизни журнала Science выполнялись вычисления показателей качества в соответствии с моделями и методами, предложенными в [5].

В дополнение к указанным выше количественным показателям определялось число слов, включенных в модель семантики анализируемого текста и, одновременно, не входящих в модель семантики широкой предметной области, сформированной для каждого десятилетия. Содержательный анализ соответствующих списков слов и изменения их состава показали хорошее соответствие представлениям экспертов о динамике изменения основного содержания широких предметных областей.

Содержательный анализ для конкретных научных статей документов, представляющих узкую и широкую предметные области, показал реалистичность предложенного способа их формирования.

Динамика изменения количественных показателей качества научных текстов продемонстрировала адекватность предложенных в [5] моделей и способов. Вычисление показателей качества для документов, включенных в широкую предметную область (а не только для анализируемой статьи), также

показало разумность введенных показателей: максимальные значения показателей, характеризующих значимость и информативность, соответствовали документам безусловно относящимся к широкой предметной области, но кардинально отличающимся по содержанию от остальных публикаций десятилетия. Ярким примером для широкой предметной области, соответствующей работе [6] о методах поиска текстовой информации, является крохотная заметка [7] с просьбой о финансовой помощи, необходимой из-за общеевропейского кризиса для продолжения издания естественнонаучного журнала на чешском языке, опубликованная в 1938 году. Другой пример – обзор достижений новейших для времени опубликования работы коммуникационных технологий [8].

Полученные результаты демонстрируют хорошую согласованность вычисляемых оценок качества научных текстов с априорными моделями развития предметных областей, к которым относятся проанализированные тексты. Приведены, систематизированы и сопоставлены с оценками экспертов результаты экспериментов по вычислительной оценке качества научных публикаций. Показана возможность формального выявления текстов, имеющих «содержательные выбросы», на основе вычисления количественных показателей значимости и информативности публикуемых текстов.

Результаты наших экспериментов показывают разумность подхода к недедуктивному обоснованию сложных формируемых вычислительно количественных моделей в результате их сопоставления с априорными качественными представлениями, основанными на профессиональном опыте и здравом смысле и не связанными с идеями, которые положены в основу исследуемых моделей.

Список литературы

1. *Saracevic T.* Effects of Inconsistent Relevance Judgments on Information Retrieval Test Results: A Historical Perspective // LIBRARY TRENDS, Spring 2008. (“The Evaluation and Transformation of Information Systems: Essays Honoring the Legacy of F. W. Lancaster,” edited by Lorraine J. Haricombe and Keith Russell). Vol. 56, No. 4. P. 763–783.

2. *Крейнес М.Г.* Модели и технологии извлечения агрегированных знаний для управления процессами поиска неструктурированной информации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С.114-124.

3. *Крейнес М.Г.* Модель текстовой коллекции для поиска информации на естественных языках: ключевые слова, их связи и контексты // VI Московская международная конференция по исследованию операций. Труды. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 150–151.

4. *Крейнес М.Г.* Информационная технология КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ®: функции, возможности, приложения // Речевые технологии. 2009. № 4. С. 97-106. (http://speechtechnology.ru/files/4-2009.pdf).

5. *Крейнес М.Г.* Методы вычислительного анализа моделей семантики для оценки качества научных текстов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 64-75.

6. *Salton G.* Development in Automatic Text Retrieval // Science. 1991. Vol. 253. № 5023. P.974-080.

7. *Hrdlicka A.* Appeal for Aid from Czecho-Slovakia // Science. 1938. Vol. 88. № 2293. P.547.

8. *Jewett F.* Communication Engineering // Science. 1937. Vol. 85. № 2217. P.591-594.

О существовании лидера в диффузионной модели конкуренции*

В.Н.Разжевайкин

ВЦ РАН им. А,А, Дородницына, Москва, Россия

Излагаются результаты о существовании лидера в обобщенной модели конкуренции, включающей как частный случай классическую вольтеррову модель конкуренции с диффузией.

1. Введение

Содержательная постановка задачи о нахождении лидера такова. Наблюдаемый в природных биологических сообществах процесс сукцессии помимо локализованного точечного проявления имеет и пространственное выражение, возникающее из-за неравномерности распределения фаз развития по ареалу обитания. Основными причинами такой неравномерности являются процессы распространения более предпочтительных форм существования сообщества от очага к периферии, связанные преимущественно с диффузионным характером распространения семян для представителей флоры и случайными блужданиями особей фауны. В результате такого распространения формируются цепочки бегущих волн, имеющих постоянные скорости, так что процесс временной сукцессии приобретает наглядную пространственную интерпретацию, в которой роль времени на моментальном срезе картины играет пространственная координата удаленности от очага. На этой картине можно наблюдать

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-07-00789

отставание более медленных, но и более приспособленных видов биологических сообществ, от более подвижных, но и более слабых в конкурентном отношении.

Оказывается, что для начальных распределений, локализованных в некоторой ограниченной области (*очаг* вспышки), процесс распространения на достаточно удаленном от очага расстоянии (на *периферии*) будет характеризоваться последовательностью сменяющих друг друга видов. При этом на финальной стадии оказываются, как правило, виды, имеющие в сложившихся окружающих условиях эволюционно оптимальные характеристики.

Основной результат представлен теоремой о независимости первого в такой последовательности вида от конкретных значений начальных распределений численности присутствующих в очаге видов.

2. **Диффузионная модель обобщенной конкуренции**

Предположим, что в некотором ареале, описывающимся единственной пространственной координатой $x \in \mathbf{R}$, распределено конечное (хотя и весьма большое) число видов, занумерованных индексом $i = 1,\ldots,N$, плотность численности которых задается функциями $u^i(x,t) \geq 0$. При отсутствии каких-либо популяционных взаимодействий динамика каждого из них подчиняется уравнению диффузии с коэффициентом $D^i > 0$, а чисто популяционные (точечные) взаимодействия характеризуются функциями источника конкурентного типа вида $u^i F^i(u)$ с $\gamma_{ij} = -\left.\dfrac{\partial F^i(u)}{\partial u^j}\right|_{u=0} \geq 0$ Здесь $u = (u^1,\ldots,u^N)$ -- вектор плотностей популяций, $\gamma_{ii} > 0$, $M^i = F^i(0) > 0$ и $\Gamma = \left\|\gamma_{ij}\right\|$ с $i, j = 1,\ldots,N$ -- матрица коэффициентов популяционных взаимодействий, называемая еще матрицей конкуренции. В линейных вольтерровых моделях конкуренции $F^i(u) = M^i - \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} u^j$.

В совокупности два обозначенных локальных процесса задают динамику сообщества, описываемую системой уравнений «реакции – диффузии» вида:

$$u^i{}_t = D^i u^i{}_{xx} + u^i F^i\left(u\right),\ i = 1,\ldots,N \qquad (1)$$

Без ограничения общности относительно начальных условий предполагается, что для каждого из видов начальное распределение неотрицательно $u^i(x,0) \geq 0$, причем носитель $S^i = \operatorname{supp} u^i(x,0) = \operatorname{cl}\{x : u^i(x,0) > 0\}$ не пуст и ограничен. Выпуклую оболочку объединения всех носителей будем называть *очагом* сообщества.

3. **Теорема о лидере**

Фиксируем направление удаления от очага (в нашей модели для определенности – в сторону возрастания $x \in \mathbf{R}$) и произвольный набор $\boldsymbol{\delta} = \{\delta^i\}$ с $0 < \delta^i < \dfrac{M^i}{\gamma_{ii}}$ (называемый далее *разделяющим набором*).

Определение. Вид с номером (номер) $i_1 \in \{1,\ldots,N\}$ назовем *лидером* для системы (1), если для любого разделяющего набора $\boldsymbol{\delta} = \{\delta^i\}$ и любого $X > 0$ найдется такое $\hat{x} > X$, что существует $t_{\boldsymbol{\delta},X} > 0$, для которого:

1) $u^{i_1}(\hat{x}, t_{\boldsymbol{\delta},X}) > \delta^i$;

2) для всех $k \neq i_1$ и $x \geq \hat{x}$ выполнены неравенства $u^k(x, t_{\boldsymbol{\delta},X}) < \delta^k$.

Будем вычислять i_1 по формуле:

$$\sqrt{D^{i_1} M^{i_1}} = \max_i \left\{\sqrt{D^i M^i}\right\} \qquad (2)$$

Номер i_1 определяется однозначно во всех грубых случаях, т.е. кроме тех, когда максимум в (2) может достигаться более чем на одном из подходящих значений. Последняя ситуация может возникнуть в вырожденном случае, т.е. при выполнении условий типа равенства, устраняемых сколь угодно малыми шевелениями коэффициентов диффузии. Во избежание ее возникновения для лидера будет предполагаться выполненной следующая гипотеза

(Г1) Решение оптимизационной задачи (2) однозначно.

Теорема *(о лидере)***.** При выполнении гипотезы (Г1) лидер в системе (1) существует и его номер определяется решением задачи (2) независимо от начальных финитных распределений.

Автоматизированное проектирование

1. *Л.Л. Вышинский, В.Л. Дунин-Барковский* Автоматизация проектирования нейрокомпьютерных моделей 137
2. *Л.Л. Вышинский, Н.И. Широков* САПР ЛА. Подсистема расчетов МИХ ЛА с переменной массой 139
3. *И.Л. Гринев, В.П. Катунин, М.Г. Трошенкова* Клиент-серверная архитектура АСУ инженерного обслуживания платежных банковских систем 139
4. *И.Л. Гринев, А.Н. Широков* Генератор проектов, как эффективное средство сопровождения, модификации и модернизации АБС 141
5. *Н.И. Широков, А.А. Логинов* Развитие инструментального комплекса «Генератор проектов» 142
6. *А.Н. Широков, А.А. Логинов, С.А. Скиндерев* Архитектура многоуровневых клиент-серверных систем, реализуемая средствами «Генератора проектов» 144

Автоматизация проектирования нейрокомпьютерных моделей

Л.Л. Вышинский, В.Л. Дунин-Барковский

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

НИИСА РАН, Москва, Россия

Нейрокомпьютерное моделирование все в большей степени становится эффективным инструментом в изучении механизмов переработки информации в нейронных структурах живых организмов. Это связано с последними достижениями нейрофизиологии и стало возможным при современном уровне развития компьютеров, их быстродействия, средств распараллеливания процессов. Однако построение таких объектов, как нейрокомпьютерные модели реальных структур мозга, само по себе представляет довольно сложную задачу. Сложность их построения связана не только с больших количеством нейронов, но и с необходимостью задания всей совокупности связей между ними, а также связей с внешними входными и выходными каналами. При этом модели должны быть построены таким образом, чтобы исследователь мог управлять потоками внешней информации, чтобы он имел возможность настраивать внутренние структуры для проверки различных своих гипотез, и чтобы он обладал необходимыми инструментами для анализа работы модели. То есть речь идет о создании не только самих моделей, но и всей инфраструктуры, обеспечивающей работу с этими моделями. Построение таких программных моделирующих систем реально только с применением специального инструментария, который бы обеспечил определенный уровень автоматизации разработки программ.

Настоящий доклад посвящен описанию одного проекта, который связан с построением компьютерной модели нейронных структур мозжечка. Основным средством автоматизации проектирования и разработки модели, представленной в докладе, является инструментальный комплекс «Генератор проектов» ([1]), разработанный в Вычислительном центре РАН. Ранее этот комплекс успешно использовался для автоматизации проектирования и разработки информационно-вычислительных систем в различных экономических, финансовых, инженерных приложениях. В этом докладе описан опыт использования «Генератора проектов» в новой области.

Мозжечок - одна из наиболее хорошо изученных структур мозга, которая содержит нейронов больше чем все остальные структуры мозга. Вычислительная модель мозжечка представляет собой динамическую систему, состоящую из множества элементарных моделей нейронов и нервных проводящих волокон, связывающих нейроны между собой. Модели нейронов и проводящих волокон реализованы в виде дифференциальных уравнений, описывающих их текущее состояние под влиянием внешних воздействий. На рис.1 показана общая структура моделирующей системы, спроектированная и реализованная с помощью Генератора проектов.

Как видно на блок-схеме (см. рис. 1 ниже), численная процедура решения уравнений модели, то есть, собственно моделирование мозжечка, занимает здесь весьма скромное место. Да и в объеме программного кода эти процедуры составляют едва лишь 10 процентов. Остальные компоненты программной реализации выполняют следующие функции:

- ведение журнала проводимых вычислительных экспериментов;
- формальное описание задач вычислительных экспериментов;
- генерация нейронных структур, связанных с конкретными задачами вычислительных экспериментов;

- хранение нейронных структур в базе данных;
- запуск и управление ходом решения задач;
- генерация потоков внешних данных для моделирования в процессе решения поставленных задач;
- визуализация процесса решения задач;
- ведение протоколов решения задач;
- сохранение текущего состояния нейронных структур в базе данных.

Рис. 1. Блок-схема программной реализации модели

Все эти функции системы моделирования мозжечка реализованы средствами инструментального комплекса «Генератор проектов».

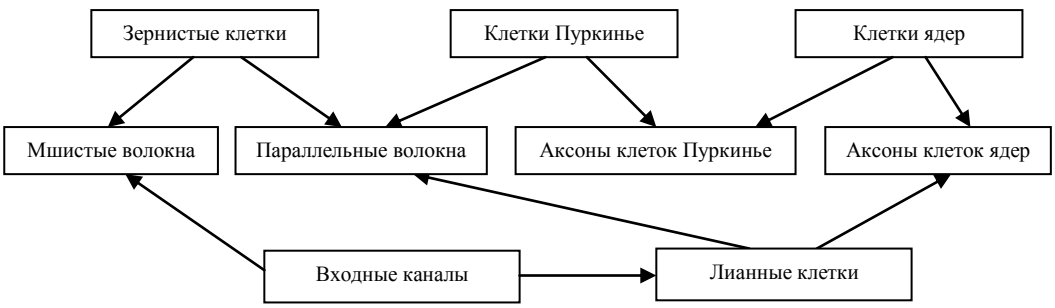


Рис.2 Структура модели мозжечка

В базе данных системы ведется журнал задач, связанных с проведением вычислительных экспериментов над моделью. В системе можно включать в журнал и описывать новые задачи, модифицировать их, удалять из журнала, а также инициировать создание нейронных сетей, связанных с этими задачами, запускать их решение и управлять ходом вычислительного эксперимента. Описание новой задачи является первым и главным шагом в проведении вычислительного эксперимента. На этом шаге задаются параметры нейронной сети и параметры нейронов, описываются входные переменные, способы кодирования этих переменных на нейронных структурах модели, определяются источник и характер входных потоков этих переменных, а также задаются параметры численной процедуры для данной задачи – тактовая частота, шаг интегрирования и прочее. Генератор нейронной сети для каждой решаемой задачи моделирования создает свою нейронную сеть, параметры которой заданы в описании задачи. Важнейшим элементом данной реализации является внутреннее представление нейронной сети. Внутренняя структура мозжечка реализована в виде сетевой структуры в смысле CODASYL. На рис. 2. представлена внутренняя струкутра модели, которая отражает состав моделируемых нейронных клеток мозжечка и нейронные связи между ними.

Число различных клеток в модели может варьироваться в зависимости от задачи и от изучаемых функций мозжечка. В докладе представлены структура модели и описание ее средствами Генератора проектов.

Список литературы

1. *Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков.* Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.

САПР ЛА. Подсистема расчетов МИХ ЛА с переменной массой

Л.Л. Вышинский, Н.И. Широков

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

Расчет массово-инерционных характеристик летательных аппаратов является одной из центральных задач, которая решается на всех стадиях проектирования и эксплуатация ЛА. Одной из основных массово-инерционных характеристик ЛА является его центровка, т.е. положение центра тяжести аппарата. Центровка наиболее существенно влияет на устойчивость и управляемость полета. Очень важно знать, как изменяется центровка в течение полета по мере расходования топлива и в случае изменения состава и положения несущей ЛА нагрузки. Многие аварии и нештатные ситуации возникают из-за того, что центровка аппарата вышла за допустимые пределы. В 1997 году при попытке стыковки транспортный грузовой космический корабль «Прогресс М-34» столкнулся с модулем «Спектр» ОС «Мир». Причиной столкновения явилось смещение центра масс «Прогресса», что заметно повлияло на эффективность его управления. Этот пример показывает важность проведения расчетов центровки во всем возможном диапазоне режимов эксплуатации ЛА. Причем, такие расчеты необходимо проводить как на стадии проектирования для типичных (расчетных) режимов применения ЛА, так и в процессе эксплуатации, когда естественны отклонения от расчетных условий его использования. В связи с этим важно иметь в составе САПР ЛА специальную подсистему, удобную для проведения расчетов зависимости центровки и других массово-инерционных характеристик ЛА от различных вариантов загрузки, порядка расходования топлива из различных топливных баков. Настоящий доклад посвящен краткому описанию такой системы, разработанной авторами.

У разработанной системы есть своя история. Впервые подобная программа была реализована в семидесятых годах в рамках совместной лаборатории ВЦ РАН и ОКБ Сухого. Разработал ее для БЭСМ-6 В.А. Стебунов. Эта программа была названа ПЕЛЕНА. Она достаточно быстро получила признание, и долгое время была основным инструментом для расчета центровочных зависимостей в ОКБ Сухого. Как всякая востребованная программа она многократно переделывалась. В первых версиях системы входная информация набивалась на перфокартах. С течением времени система модифицировалась, перфокарты вместе с БЭСМ-6 ушли в прошлое, появилась VAX/VMS с интерактивным вводом, но технология применения ПЕЛЕНЫ сохранялась вплоть до недавнего времени. Однако в настоящее время эта технология явно не вписывается в современные возможности компьютеров.

Система, которой посвящен настоящий доклад и которую авторы, отдавая дань первому ее прототипу, назвали ПЕЛЕНА-М, по своим возможностям, по функциям, по пользовательскому интерфейсу и внутренней структуре является самостоятельной новой разработкой. Она существенным образом отличается от старой ПЕЛЕНЫ. Разумеется, отличия не касаются основополагающих вычислительных процедур расчета характеристик. Новизна состоит в организации работы с исходными данными, в способах задания различных расчетных режимов, в организации одиночных и массовых расчетов характеристик и в представлении результатов расчетов.

ПЕЛЕНА-М разработана как многопользовательская система с центральной базой данных и трехуровневой клиент-серверной архитектурой. Система разработана с помощью инструментального комплекса «Генератор проектов» ([1]).

Список литературы

1. *Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков.* Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.

Клиент-серверная архитектура АСУ инженерного обслуживания платежных банковских систем

И.Л. Гринев, В.П. Катунин, М.Г. Трошенкова

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия,

ООО «Универсальные системы и технологии», Москва, Россия

Одной из задач, связанной с повышением эффективности банковского сектора, является инженерное обслуживание платежных банковских систем, в которых используется сложная современная вычислительная техника. Необходимость создания автоматизированных систем управления (АСУ) инженерным обслуживанием диктуют бурный рост сети сложных технических устройств самообслуживания, высокая стоимость их эксплуатации и недопустимость потерь в случае выхода из строя и длительного ожидания ремонтных или профилактических работ. В докладе рассмотрена задача

проектирования и разработки автоматизированной системы управления инженерным обслуживанием - АСУ «Сервис-Центр». В процессе разработки АСУ был использован «Генератор проектов» ([1]), что позволило в короткие сроки создать и ввести ее в эксплуатацию в одном из регионов.

Рассматриваемая задача связана с учетом состояния и различных показателей ремонта и обслуживания устройства самообслуживания (УС, банкоматы, платежные терминалы, информационные киоски). В процессе ремонта и обслуживания задействованы следующие участники:

– банки, в ведении которых находятся УС и которые инициируют ремонт УС;

– информационный центр (ИЦ), который принимает от банков заявки на ремонт, инициирует и осуществляет мониторинг их исполнения;

– сервисный центр (СЦ), который непосредственно осуществляет исполнение заявок на ремонт и обслуживание УС и информирует ИЦ о ходе выполнения заявок.

На рис. 1 (ниже) представлена архитектура программной системы «Сервис-Центр». Система реализована в рамках концепции, которая принята в «Генераторе проектов» - это многоуровневый клиент-сервер». Серверными компонентами системы являются:

– главный сервер приложений (бизнес-сервер),

– СУ СУБД (система управления базой данных),

– сервер файловой загрузки заявок на обслуживание,

– сервер отправки почтовых сообщений,

– сервер приема и отправки СМС, связанных с управлением выполнения заявок.

Клиентскими модулями системы являются:

– модуль Администратора системы,

– модуль координатора приема и исполнения заявок,

– модуль исполнителей заявок.

Главный сервер приложений выполняет все содержательные запросы к базе данных системы через стандартный программный интерфейс.

Клиентский модуль «Администратор» - это программа, которая предназначена для ведения информационно-справочного материала, который включает различные справочники (банки, заказчики, типы УС, виды обслуживания, исполнители и др.).

Клиентский модуль «Исполнитель» реализован на мобильных устройствах с ОС Android и предназначен для оперативного обмена данными в полевых условиях с главным сервером приложений по протоколу СМС. По мере завершения операций исполнитель, используя команды модуля, отсылает СМС в адрес сервера приложения (фактически указывая номер телефона модема 3G). В свою очередь на телефон исполнителя поступают данные в виде СМС от главного сервера (например, реквизиты назначенной исполнителю заявки, информация о состоянии отдельных заявок и др.). Эти данные переформатируются в соответствие с принятым протоколом и предстают для исполнителя в удобном виде (список заявок, истории выполнения и т.д.)

Сервер отправки почтовых сообщений является выходным шлюзом для отправки через почтовый сервер оперативных данных по ходу выполнения заявок различным участникам. С заданной периодичностью просматривается содержимое БД с данными для рассылки, затем формируется и отправляется электронное сообщение.

Сервер загрузки заявок – это серверное приложение, которое с заданной периодичностью просматривает содержимое указанного почтового ящика, предназначенного для приема электронных сообщений с заявками от ИЦ. Если реквизиты сообщения соответствуют заданному критерию (по отправителю, теме заголовка и др.), то выполняется лексикографический разбор текста сообщения, формируются и сохраняются в БД указанные в сообщение реквизиты конкретной заявки. После проверки реквизитов (наличие УС и банка в справочниках, корректность вида и сроков обслуживания) заявка поступает в распоряжение координатора.

Сервер приема и отправки СМС это программный шлюз, обеспечивающий прием и отправку СМС с реквизитами заявок в адрес исполнителя. При назначении заявки исполнителю формируется СМС с реквизитами заявки. Это СМС отправляется с помощью команд модема 3G в адрес исполнителя. В ходе обслуживания заявки исполнитель отправляет через свой модуль данные (например, состояние, характер и продолжительность работ) в виде СМС. Сервер СМС с указанной периодичностью просматривает входящие сообщения на модеме. Далее выполняется лексикографический разбор текста СМС, формируются и проверяются указанные в СМС данные (телефон исполнителя, номер и состояние заявки). Проверенные данные автоматически сохраняются в БД.

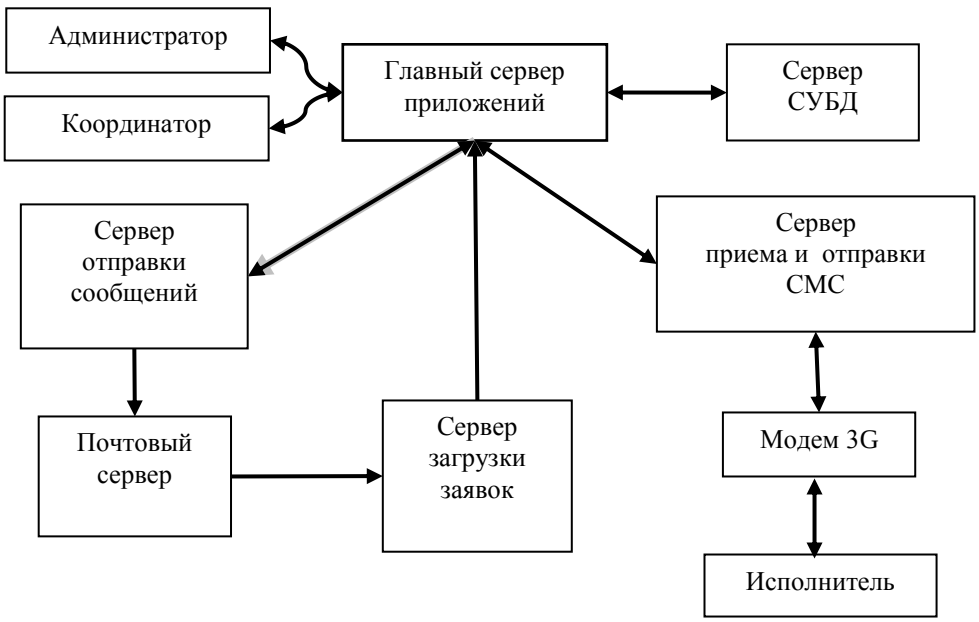


Рис. 1. Архитектура АСУ «Серис-Центр»

Список литературы

1. *Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков* Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.

Генератор проектов, как эффективное средство сопровождения, модификации и модернизации АБС

И.Л. Гринев, А.Н. Широков

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

Продолжительность жизненного цикла прикладных информационно-вычислительных систем в современном стремительно меняющемся компьютерном мире не очень велика. Особенно остро это ощущается в сфере использования автоматизированных банковских систем (АБС). Как правило, период их эксплуатации редко доходит до 8-10 лет. Это объясняется тем, что их программная реализация очень быстро отстает от прогресса вычислительной техники и от возрастающих требований банковского бизнеса. Однако увеличить период жизненного цикла АБС можно, если на стадии их проектирования предусмотреть возможность эффективного сопровождения, модификации и модернизации программного обеспечения. В настоящем докладе рассматривается преимущества инструментального комплекса «Генератора проектов» (ГП), предназначенного для разработки прикладных информационных систем, именно с точки зрения возможностей их сопровождения и модификации.

В основе технологии ГП лежит проектный подход к созданию прикладных систем. Под этим подходом понимается создание системы как комплекса следующих компонент:

– ПРОЕКТ, т.е. формальное описание системы на языке высокого уровня;

– ПК - программный код системы, полный комплект программ, которые автоматически генерируются по разработанному ПРОЕКТУ средствами ГП;

– ИМ - исполнительные модули и утилиты системы – результат трансляции ПК и сборки программного комплекса стандартными средствами;

– БД - базы данных системы под управлением указанных в ПРОЕКТЕ СУБД; инсталляция и модификация БД осуществляется сгенерированными утилитами системы:

– ГП - инструментальный комплекс «Генератор проектов», с помощью которого был сгенерирован ПК системы. Вхождение текущей версии ГП в систему очень важно.

Проектный подход позволяет достаточно эффективно осуществлять сопровождение прикладных систем. Если в процессе эксплуатации системы выявляются ошибки проектирования или возникает необходимость изменений в бизнес - процедурах, в интерфейсе, в построении каких-либо документов,

то такие изменения можно реализовать на уровне проекта системы. При этом остальные компоненты системы (программный код, исполнительные модули, база данных) корректируются автоматически. В течение жизненного цикла прикладных информационных систем может изменяться не только исходный проект системы, но иногда требуется внести изменения в инструментальную компоненту – в Генератор проектов, который отнюдь не является застывшим инструментом.

В докладе будут рассмотрены различные аспекты сопровождения и модернизации прикладных информационных систем на примере биллинговой системы «Енисей» ([1]), которая была разработана и введена в эксплуатацию несколько лет назад. Борьба за производительность, разделение на подсистемы OLTP и OLAP, многоканальность, интеграция с внешними АС (on-line и off-line) и некоторые другие обстоятельства привели к необходимости в процессе эксплуатации биллинговой системы «Енисей» модернизировать не только исходный проект системы, но и Генератор проектов.

Список литературы

1. *Широков А.Н., Логинов А.А., Гринёв И.Л.* Организация функционирования биллинговой системы в автоматизированной банковской среде. В сб. «Автоматизация проектирования инженерных и финансовых информационных систем средствами «Генератора проектов»». М.: ВЦ РАН, 2010 г. с. 45-54.

Развитие инструментального комплекса «Генератор проектов»*

Н.И. Широков, А.А. Логинов

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

Интенсивное использование инструментального комплекса «Генератор проектов» при разработке широкого класса прикладных многопользовательских информационных систем постоянно ставит новые проблемы и новые задачи перед разработчиками этого инструментария. В настоящем докладе обозначен круг таких новых задач и направлений, а также пути их решения и те изменения в Генераторе проектов, которые в связи с этим реализованы в его новых версиях.

Экспорт/импорт компонент проектов.

Одна из основных областей применения «Генератора проектов» (ГП) – это большие по объему программного кода проекты. В этом процессе наметилось два направления развития. Первый – это усложнение структуры проекта, предусматривающей описание многочисленных серверов с несколькими портами для подключения клиентов (клиентом может быть как рабочее место пользователя, так и другой сервер). Второй – это разбиение проекта на несколько самостоятельных проектов с механизмом экспорта/импорта компонент проекта.

Разбиение проекта на несколько самостоятельных проектов имеет две мотивации. Первая – это работа над проектом нескольких разработчиков. Вторая мотивация разбиения проекта на подпроекты – это этапность передачи программных продуктов заказчику.

Разбиение проектов на подпроекты было расширено от экспорта/импорта портов, как естественного межпроектного интерфейса, до экспорта/импорта пакетов достаточно произвольного типа – обычные программные пакеты с декларацией типов и процедур, описание окон, диалогов, спецификаций динамических библиотек, интерпретаторов языка gscript. Разрешен транзитивный экспорт – экспорт импортированного пакета.

Децентрализация модели проекта.

Разбиение проекта на подпроекты – удобный механизм разделения работы между несколькими разработчиками. Но при большом количестве подпроектов становится затруднительным поддержание целостности всей совокупности подпроектов. В реальных задачах при использовании ГП граф связей подпроектов имеет нетривиальный вид и даже содержит циклы. В таких случаях последовательное итеративное приведение совокупности к целостному состоянию требует времени. Просматривается два альтернативных пути решения проблемы: автоматизация работы над мегапроектом (совокупностью подпроектов с взаимными экспортами/импортами) или возможность одновременной работы над очень большими проектами.

Инсталляция и локальные настройки проектов.

Существенно переработан механизм передачи проекта заказчикам. В проекте можно описывать подмножество сгенерированных исходных текстов программ, реализующих тот или иной комплект программ (subsource). Раньше этот механизм предполагал генерацию командных файлов, копирующих из полного проекта в отдельную директорию нужных файлов. Такой режим чрезвычайно сложен, так как предполагает иметь заранее сгенерированные варианты командных файлов сборки для отдельных

* Работа выполнена при финансовой поддержке по программе РАН П15, проект № 203

подмножеств. Это очень сложно в реализации, в результате постоянно нарушалась целостность таких файлов. Теперь каждый отдельный subsource рассматривается как разновидность проекта, только не со всеми программными компонентами, а с заданным перечнем. И формирование таких совокупностей реализуется не командными файлами, а самим генератором по специальной команде. Для экономии времени при текущей работе можно не задавать режим генерации всех комплектов, но при необходимости можно сгенерировать нужный комплект или все сразу. Структура сгенерированных файлов идентична таковой для проекта в целом. Но в ней содержится только необходимый минимум программных файлов для сборки заданных программ комплекта. Это удобно в том случае, когда отдельному заказчику нужно сдавать исходные тексты программ, но нежелательно сдавать весь проект целиком.

Автоматизирована процедура выкладывания проекта в виде: проекта для генератора, исходных файлов проекта для заказчика, результирующих программ для заказчика. Описание способов и типов публикации разделено на логическую и сетевую части. Логическая часть описывается в проекте и представляется как часть модели проекта. Но логическая часть не содержит никаких сведений о реальном расположении серверов и их параметров, куда выкладывается проект или его часть. Сетевая часть располагается на конкретном компьютере и содержит описание конкретных доступных с него серверов с указанием логинов, директорий и т.п. (не паролей). При генерации проекта на данном компьютере учитывается локальное задание таких серверов и создаются командные файлы для переписи нужных компонент проекта на указанные серверы. Реализован также механизм зеркалирования при переписи для транзитной передачи с сервера на сервер при медленной связи. Перепись реализуется с использованием протокола ssh.

Реализована удаленная сборка проектов на альтернативных платформах. Разработка и модификации ГП ведутся под ОС Linux, но генератор может работать и под ОС Windows. Генерируемые проекты могут работать под различными платформами в зависимости от типа программных компонент. В локальных настройках генератора для конкретного компьютера можно задавать ряд параметров, влияющих на процедуру генерации: на режим генерации советов (подсказки по модификации программы, предусмотренные в генераторе) и на режим использования различных проверок модели на корректность.

Полудинамические SQL-запросы к базе данных

В ГП работа с базами данных предполагает описание структуры базы данных (состава таблиц) в пакете специального типа. В этом же пакете предусмотрено описание всех sql-запросов к базе в виде именованных процедур с параметрами. Это так называемые статический запросы, когда текст sql-запроса анализируется средствами ГП на предмет его соответствия синтаксису sql и составу таблиц базы данных. Такой способ исключает ошибки синтаксиса в момент выполнения запроса при работе программы. Предполагается, что в базе данных перечень таблиц и состав колонок фиксирован.

При необходимости есть возможность выполнять полностью динамические запросы к базе путем формирования текста запроса пользователями в процессе работы программы, задания параметров запроса и извлечения его результатов. Это традиционный способ, но он чреват ошибками и поэтому не рекомендуется пользователям.

В новых версиях ГП реализован промежуточный вариант, так называемых, **полудинамических** запросов. Для этого синтаксис sql-выражений дополнен таким образом, что можно через булевские параметры обычного статического запроса отключать отдельные части его текста.

Новая реализация типов-документов.

Существенный вклад в мощность языка ГП вносит использования таких типов данных, как документы (реализация сетевой СУБД в памяти или в совокупности файлов, незаслуженно забытая современным программистским сообществом). До сих пор в ГП были следующие реализации документов (при одинаковом интерфейсе): **стандартные документы** (записи документа в переразмещаемых массивах в памяти), **динамические документы** с иерархической четырехуровневой страничной организацией, **базы данных** с хранением в файлах с прямым доступом.

Стандартные документы максимально эффективны при активной работе с записями и редким созданием записей. Они требуют задания размера порций при расширении, а при отсутствии такого задания или большом объеме могут быть очень медленными. **Динамические документы** медленнее в работе, но быстрые при создании, особенно при больших объемах. **Базы данных** медленнее, но зато они не требуют использования динамической памяти (только буфера на отдельные записи).

Интернациональные кодировки и локализация.

В связи с требованиями некоторых заказчиков возникла необходимость использования в сгенерированных проектах текстовых сообщений на языках, отличных от русского. Для этого ГП был переделан таким образом, что все значимые файлы описания проекта (не файлы данных, содержимое которых – черный ящик для ГП) теперь должны бытъ в кодировке UTF-8. При этом генерируемые программы для старых проектов по-прежнему создаются в кодировке WINDOWS-1251 (или какой другой для данного заказчика), изменилась только работа в редакторе с файлами проекта.

Проект может быть написан на некотором языке, декларированном в заголовке проекта. Системные сообщения пакетов из состава генератора написаны на английском языке и в ГП есть словарь для их русского перевода. Если базовым языком задать английский или русский, то в результирующих программах системные сообщения будут на выбранном базовом языке. При выборе базового языка отличного от английского и русского необходимо задать словарь для перевода системных английских текстов на базовый язык. В принципе возможно для проекта задать статическую локализацию, указав перечень возможных языков и предоставив соответствующие словари с английского и базового на все декларированные. При генерации проекта задается текущий язык из списка и программы генерируется для него. Это неудобно, так как для каждого языка нужна повторная генерация, сборка создание дистрибутива, опубликование и т.п.

В новых версиях ГП реализован режим динамической локализации. Также задается перечень языков, базовый язык, словари как при статической локализации. Но программа генерируется таким образом, что все сообщения загружаются в память при ее запуске из прилагаемого файла. Комплект файлов для перечисленных языков включается в дистрибутив. Заказчик может эти файлы отредактировать и заставить программу общаться на любом языке. Файл динамического словаря естественно в кодировке UTF-8, и доступен для любого современного редактора.

Кроме перечисленных возможностей в новой версии «Генератора проектов» реализован ряд других изменений, расширяющих его возможности.

Список литературы

1. *Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков* Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.

Архитектура многоуровневых клиент-серверных систем, реализуемая средствами «Генератора проектов»*

А.Н. Широков, А.А. Логинов, С.А. Скиндерев

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

В докладе рассматривается пример сложной многоуровневой клиент-серверной архитектуры, которая возникает при разработке современных банковских систем. Сложность таких систем является результатом выполнения многих противоречивых требований, возникающих в процессе автоматизации банковской отрасли. Проектирование и разработка такого рода информационно-вычислительных систем требует определенного концептуального подхода и соответствующего инструментального обеспечения. Основным средством автоматизации проектирования описанной здесь архитектуры является Генератор Проектов, разработанный в ВЦ РАН ([1], [2]). На рисунке 1 изображена архитектура новой версии биллинговой системы «Енисей» ([3]).

Основные компоненты, изображенные на рис. 1, выполняют следующие функции:

– **MP** - ПК MassPay - обеспечивает прием платежей через устройства самообслуживания;

– **MPR** – Маршрутизатор - обеспечивает прием платежей через мобильные телефоны;

– **ESB** - Корпоративная сервисная шина - обеспечивает прием платежей через Интернет;

– **FTM** - Фронтальный терминальный модуль - обеспечивает прием платежей через устройства самообслуживания напрямую без дополнительных систем;

– **RBO** - Модуль кассира - обеспечивает прием платежей через кассовое рабочее место;

– **FTS** - Фронтальный терминальный сервер - обеспечивает формирование и обработку сценария проведения платежей клиентов;

– **IDN** - Сервер идентификации - производит идентификацию/аутентификацию клиентов биллинговой системы и ведении их профилей с операциями;

– **TRN** - Транзакционный сервер - обеспечивает обработку и сохранение платежей клиентов в базе данных;

– **RFB** - Сервер «Справочники-онлайн» - обеспечивает ведение и оперативный доступ к НСИ в базе данных;

– **TOT** - Сервер Отчетной подсистемы - обеспечивает ведение архива платежей, их обработку и формирование отчетов;

* Работа выполнена при финансовой поддержке по программе РАН П15, проект № 203

– **TCM** - Транспортный клиентский модуль - обеспечивает онлайн взаимодействие с внешними системами;

– **TCMABI_CST** - АБИ для работы с базой ЛС - обеспечивает онлайн взаимодействие с базой лицевых счетов;

– **TCMABI_TSB** - АБИ для работы с сервером TSB - обеспечивает онлайн взаимодействие с внешним онлайн биллингом через TSB.

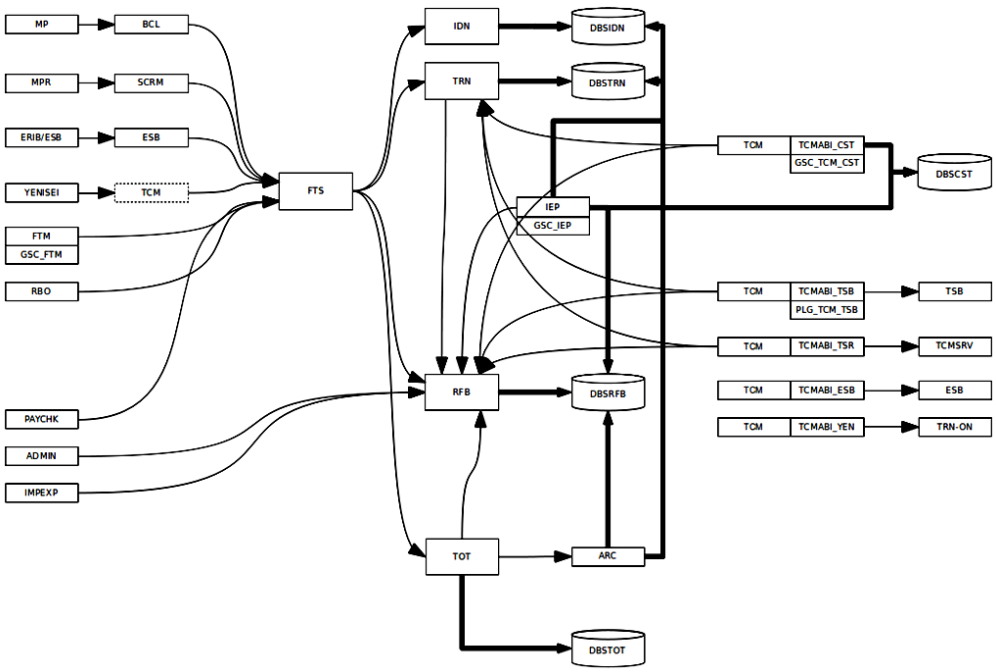


Рис.1. Архитектура биллинговой системы «Енисей».

Ядром системы выступает справочная подсистема (сервер RFB). Фактически в нем реализовано ведение всей нормативно-справочной информации с точки зрения прикладной задачи, а также там обеспечивается ведение дополнительной архитектурно-настроечной информации, которая необходима для правильного взаимодействия всех входящих в биллинговую систему компонент. Транзакционный сервер обеспечивает обработку и сохранение платежей в базе данных, а также взаимодействует с внешними системами. Фронтальный сервер выполняет роль маршрутизатора между всеми компонентами системы и обеспечивает формирование и обработку сценария выполнения платежей. Представленная архитектура отражает только основные компоненты системы. Некоторые части системы, такие как связки TCM-TCMABI распадаются на множество различных архитектурных связей между разными частями самой системы и вне ее.

Такую сложную многокомпонентную систему удается поддерживать в работоспособном состоянии и развивать только благодаря применению инструментального комплекса «Генератор Проектов». Более того, целиком весь проект биллинговой системы разбит на несколько подпроектов, каждый из которых выполняет некоторый законченный функциональный набор. Связи между подпроектами осуществляются через импорт/экспорт спецификаций портов с запросами, либо через импорт/экспорт спецификаций библиотечных вызовов. Генератор Проектов позволяет производить операции импорта/экспорта практически в автоматическом режиме, что освобождает разработчика от сложной работы межпроектного согласования.

Список литературы

1. *Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков* Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.

2. *Логинов А.А., Широков А.А., Широков Н.И.* Многоуровневые структуры в клиент-серверных информационных системах. В сб. «Автоматизация проектирования инженерных и финансовых информационных систем средствами «Генератора проектов»». М.: ВЦ РАН, 2010 г. стр. 25-33.

3. *Широков А.Н., Логинов А.А., Гринёв И.Л.* Организация функционирования биллинговой системы в автоматизированной банковской среде. В сб. «Автоматизация проектирования инженерных и финансовых информационных систем средствами «Генератора проектов»». М.: ВЦ РАН, 2010 г. стр. 45-54.

Теоретико-игровые модели

1. *И.А. Башлаева* Некоторые равновесия в неантагонистических позиционных играх на графах 146
2. *В.А. Горелик* Использование методов коррекции данных для согласования разных понятий решений в кооперативных играх 147
3. *В.А. Горелик, Т.В. Золотова* Анализ модели регулируемого равновесия в иерархических системах управления 148
4. *В.А. Горелик, Т.В. Золотова* Оценка коллективного риска в иерархических системах, связанного с децентрализацией управления 150
5. *М.А. Горелов* Непрерывные информационные агрегаты в иерархических играх двух лиц 152
6. *К.В. Григорьева, П.Г. Шайкина* Многокритериальная коалиционная модель принятия решений с различными предпочтениями игроков 154
7. *Н.А. Зенкевич, А.В. Зятчин* Кооперативное сильное равновесие в теоретико-игровой задаче об оптимальной развозке 156
8. *К.Н. Кудрявцев* Сильно гарантированный дележ в одной линейно-квадратичной игре при неопределенности 158
9. *В.Н. Лебедев, И.А. Башлаева* Игровые методы логических вычислений и их приложение 160
10. *М.М. Луценко, Н.В. Шадринцева* Вектор Шепли в играх с упорядоченным множеством игроков 161
11. *Е.З. Мохонько* О равновесии в некоторых повторяющихся играх 163

Некоторые равновесия в неантагонистических позиционных играх на графах*

И.А. Башлаева

Волгоградский Государственный Университет, Волгоград, Россия

Рассмотрим следующую динамическую игру, которая определяется ориентированным графом с множеством вершин V и множеством ориентированных ребер E. Вершины разбиты на множества хода $1, \dots, k$.

игроков $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Ход заключается в передвижении фишки из текущей вершины по одному из исходящих ребер в очередную вершину. В вершинах заданы вектора выигрышей игроков $p: V \to Z \times \dots \times Z$, где $p_i(v), i = 1, \dots, k$ выигрыш i –ого игрока в вершине v. Считаем, что любая вершина остановочная. То есть игрок, в текущей вершине которому принадлежит право хода, может остановить игру, и тогда выигрыши игроков определяются вектором платежей в данной вершине. Заметим, что если в игре возникает цикл. То игроки получают бесконечные положительные выигрыши. Цель каждого игрока – минимизация своего выигрыша.

В работе [1] дана гипотеза о наличии стационарного, неравномерного (зависимого от начала) равновесия в рассматриваемой игре.

Мы доказываем наличие следующих позиционных равновесий в частных случаях задачи.

Утверждение 1. Если в каждой вершине игрок имеет возможность перевести игру в вершины по крайней мере двух различных игроков, тогда существует стационарное, неравномерное (зависящее от начальной вершины) равновесие.

Утверждение 2. В любой двоичной игре (выигрыши игроков из множества $\{0,1\}$) существует стационарное, равномерное равновесие.

Утверждение 3. В любом циклическом графе существует стационарное равномерное равновесие.

Циклическим графом называют граф, вершины которого разбиты на множества $V = H_1 \cup \dots \cup H_t$. Каждое множество вершин $H_1, \dots, H_t$, целиком принадлежит множеству права хода одного и того же игрока. Локальная структура графа $(H_i H_{i+1})$ полна. То есть игрок в любой вершине множества H_i имеет возможность перевести игру в любую вершину множества H_{i+1}, $i = 1, \dots, t$. В вершинах множества H_t *в вершины множества* H_1.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ВолгГУ

Список литературы

1. *Boros, V.Gurvich* On Nash-solvability in pure stationary strategies of finite games with perfect information which may have cycles// Mathematical Social Sciences 46 (2003) 207-241.

Использование методов коррекции данных для согласования разных понятий решений в кооперативных играх*

В.А. Горелик

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

Рассматривается проблема совмещения различных понятий решения кооперативной игры. Для ее формализации используется подход к несобственным задачам оптимизации, основанный на идее коррекции исходных данных. Сформулированы задачи минимальной коррекции, которые сводятся к линейному и квадратичному программированию.

Двумя основными концепциями справедливого распределения благ являются эгалитаризм и утилитаризм. Эгалитаризм утверждает, что при распределении благ в первую очередь следует обращать внимание на полезность наиболее «обделенных» членов общества. Утилитаризм же считает справедливым «эффективное» распределение, приводящее к наибольшей сумме полезностей членов общества. Применение этих концепций к теории кооперативных игр приводит к понятиям *N*-ядра и вектора Шепли соответственно, которые существуют для любой кооперативной игры. В то же время они могут не обладать свойством устойчивости, которое лежит в основе понятия *C*-ядра. Зато последнее может быть пустым. Для этого случая введем понятие C_p-ядра:

$$C_p = \left\{ x \in X'(v) : \|\Delta\|_p \to \min, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \Delta_{v(S)} \ \forall S \subset K \right\},$$

где $X'(v)$ – множество распределений, $\|\cdot\|_p$ − норма Гельдера, K – «большая» коалиция, $C_p \neq \varnothing$ (если *C*-ядро игры существует, то C_p=*C*).

Изучая связь *N*-ядра и C_p-ядра можно прийти к следующему выводу.

Теорема 1. *N-ядро принадлежит C_p-ядру при $p = \infty$.*

Шепли подошел к понятию решения аксиоматически. Каждой игре сопоставляется вектор значений $\varphi(v)=(\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$, компоненты которого интерпретируются как вес игрока в игре и удовлетворяют трем аксиомам:

1) аксиоме эффективности,

2) аксиоме симметрии,

3) аксиоме агрегации.

Этих аксиом оказывается достаточно для однозначного определения значения φ для всех игр. Элементы вектора Шепли вычисляются по формуле:

$$\phi_i = \sum_{\substack{S \subset K \\ S \ni i}} \frac{(|S|-1)! \cdot (|K|-|S|)!}{|K|!} (v(S) - v(S \setminus i)),$$

где $|S|$ и $|K|$ - количество игроков в коалиции S и K соответственно.

Дележ, построенный по такой формуле, основан на понятии справедливости: сколько игрок привнес в сообщество (коалицию), таков его выигрыш. Вектор Шепли всегда может быть вычислен однозначно.

Как уже было сказано, дележи *C*-ядра обладают устойчивостью, однако вектор Шепли ядру в общем случае не принадлежит. Очевидно, если вектор Шепли будет принадлежать *C*-ядру, то такой дележ является одновременно и устойчивым и «справедливым» (в утилитарном смысле, в эгалитарном смысле «справедливым» можно считать дележ *N*-ядра, которое является селектором *C*-ядра).

Рассмотрим комбинацию отношений предпочтения *C*-ядра и вектора Шепли, а условие принадлежности вектора Шепли *C*-ядру в произвольной кооперативной игре – как одно из ограничений на коррекцию характеристической функции игры.

Теорема 2. *Для того чтобы вектор Шепли принадлежал непустому C-ядру, необходимо и достаточно выполнение условия:*

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-91162

$$\sum_{\substack{i\in T\\ T\subset K}}\sum_{\substack{S\subset K\\ S\ni i}}\frac{(|S|-1)!\cdot(|K|-|S|)!}{|K|!}(v(S)-v(S\setminus i))\geq v(T) \qquad (1)$$

Вообще говоря, в вопросе взаимного расположения *C*-ядра и вектора Шепли, возможны следующие варианты.

1) *C*-ядро не пусто, вектор Шепли ему принадлежит. В качестве решения можно выбрать соответствующий дележ – значение вектора Шепли.

Примерами таких игр являются выпуклые игры: игра (K, v) называется выпуклой, если для любых коалиций S, $T \subseteq K$ справедливо неравенство

$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

Вектор Шепли всегда является центром тяжести *C*-ядра выпуклой игры.

2) *C*-ядро не пусто, вектор Шепли ему не принадлежит.

3) *C*-ядро пусто, вектор Шепли существует и представляет собой неустойчивый дележ.

Для случая, когда не выполняется условие (1), сформулируем задачу коррекции характеристической функции кооперативной игры:

$$\|\Delta\|_p \to \min$$

$$\sum_{\substack{i\in T\\ T\subset K}}\sum_{\substack{S\subset K\\ S\ni i}}\frac{(|S|-1)!\cdot(|K|-|S|)!}{|K|!}(v(S)-\Delta_{v(S)}-(v(S\setminus i)-\Delta_{v(S\setminus i)}))\geq v(T)-\Delta_{v(T)}.$$

Для случая p=2 получаем задачу квадратичного программирования:

$$\sum_{S\subset N}\Delta^2_{v(S)} \to \min$$

$$\sum_{\substack{i\in T\\ T\subset K}}\sum_{\substack{S\subset K\\ S\ni i}}\left[\frac{(|S|-1)!\cdot(|K|-|S|)!}{|K|!}(\Delta_{v(S)}-\Delta_{v(S\setminus i)})\right]-\Delta_{v(T)}\leq D,$$

для p=∞ – задачу линейного программирования:

$u \to \min$

$u \geq \Delta_{v(S)}, \quad u \geq -\Delta_{v(S)},$

$$\sum_{\substack{i\in T\\ T\subset K}}\sum_{\substack{S\subset K\\ S\ni i}}\left[\frac{(|S|-1)!\cdot(|K|-|S|)!}{|K|!}(\Delta_{v(S)}-\Delta_{v(S\setminus i)})\right]-\Delta_{v(T)}\leq D,$$

где D – константа, определяемая исходными данными.

Предложенная схема справедлива для случая непустого и пустого *C*-ядра.

Оценивая изменения, которые будет претерпевать игра в результате коррекции, отметим, что вектор Шепли обладает свойством сильной ковариантности:

$$\{v'(S)=\alpha v(S)+\beta(S)\}\Rightarrow \phi_i(v')=\alpha\phi_i(v)+\beta_i\ ,$$

поэтому в случае коррекции вариацией столбца свободных членов значение вектора Шепли изменится на некоторую константу $\Delta_{v(S)}$ и это в равной степени коснется каждого участника. Таким образом, легко вычислить, какое влияние окажет коррекция на выигрыш каждого игрока. Очевидно, что при $\Delta_{v(S)} > 0$ выигрыш уменьшится, однако, в результате проведенных изменений мы получим устойчивый дележ, гарантирующий стабильность в отношениях взаимодействия, что является зачастую более важным фактором, способствующим принятию решения о кооперации.

Анализ модели регулируемого равновесия в иерархических системах управления*

В.А. Горелик, Т.В. Золотова

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия,
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Предлагается модель территориальной корпорации с децентрализованной схемой управления и горизонтальными связями на нижнем уровне. Доказано существование ситуации регулируемого

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-91162

равновесия на нижнем уровне. Построен механизм информационного регулирования, при котором цена децентрализации равна нулю.

Описание функционирования иерархической системы управления подразумевает задание порядка принятия решений (выбора управляющих параметров) и информированности всех элементов в моменты принятия решений, а также принципов выбора при всех возможных видах информированности (с точки зрения центра). Выбирая управляющие параметры и передавая информацию подсистемам, центр стремится к тому, чтобы в процессе функционирования системы добиться выполнения необходимых глобальных ограничений на параметры системы (в широком смысле устойчивости или гомеостазиса системы) и в пределах области допустимости (гомеостазиса) оптимизировать значение своего критерия эффективности. При этом задача управления в иерархической системе имеет смысл, если выполняется условие согласованности всех элементов системы [2]. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Проблема обеспечения устойчивости функционирования решается в данной работе на основе понятия коллективного риска [1], оцениваемого величиной возможных потерь, связанных с принятием решений в условиях неполной информации. Условие идеальной согласованности (достижение абсолютного максимума критерия эффективности центра) в общем случае может и не выполняться, но в некоторых случаях можно рассчитывать на идеальную согласованность.

Под управлением центра можно понимать передачу информации, которую подсистемы самостоятельно добывать не могут, о прогнозируемых значениях факторов, влияющих на функционирование всей системы и ее подсистем. Если управление центра сводится только к передаче информации нижнему уровню о значениях некоторых параметров, то такое управление называется информационным регулированием [1, 2]. Двухуровневая иерархическая система, в которой управление центра представляет собой информационное регулирование, а подсистемы связаны между собой и коллективным принципом поведения для них является равновесие по Нэшу, называется моделью регулируемого равновесия. В такой модели задача центра состоит в переводе системы в наиболее эффективную для него (в смысле критерия эффективности) ситуацию равновесия, определяемую информированностью подсистем.

В работе предлагается модель территориальной корпорации с децентрализованной схемой управления и горизонтальными связями на нижнем уровне, для которой условные математические ожидания $W_j(x_1,\ldots,x_n,K,p_i)$ критериев эффективности $F_j(x_1,\ldots,x_n,K,\xi)$ нижнего уровня с точки зрения i-го предприятия имеют вид

$$W_j(x_1,...,x_n,K,p_i) = c_j b_j x_j^r - wx_j^{2r} - R(K,p_i)\alpha_j b_j x_j^r (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j x_j^r)^{-1}, x_j > 0,\ j = 1,...,n,$$

где x_i - объем некоторого фактора производства, используемого i-м предприятием и отрицательно влияющего на окружающую среду (управление предприятия), $i = 1,...,n$, $f_i(x_i) = b_i x_i^r$, $0 < r \le 1$ - производственная функция, $wg_i(x_i)x_i$ - функция затрат для каждого предприятия, w - «базовая» цена единицы фактора, $g_i(x_i) = x_i^{2r-1}$ - функция, корректирующая стоимость единицы фактора (предполагается, что стоимость единицы фактора может устанавливаться в зависимости от объема затрачиваемого ресурса). Если c_i - стоимость единицы продукции предприятия, то $c_i f_i(x_i) - wg_i(x_i)x_i$ - прибыль i-го предприятия в результате его производственной деятельности, $R(K,p_i)\alpha_j b_j x_j^r (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j x_j^r)^{-1}$ - компенсация, выплачиваемая i-м предприятием пропорционально величине ущерба $R(K,p_i)$ окружающей среде, α_i - непосредственный ущерб с единицы продукции в виде загрязнения территории, K - параметр, характеризующий долгосрочное воздействие производства на внешнюю среду, p_i - вектор вероятностей значений случайной величины ξ (например, ущерба от техногенных катастроф). Регулирующее воздействие (управление) центра состоит в передаче i-му предприятию информации о значении K и векторе вероятностей p_i, являющихся неконтролируемыми факторами, значения которых известны центру, но не подсистемам. При $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$ управления центра называются однородными, в противном случае – неоднородными. Рассмотрено шесть типов передачи информации центром на нижний уровень, носящий как случайный, так и неопределенный характер.

Интересы центра описываются функцией

$$F_0(x_1,...,x_n,K,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i(x_1,...,x_n,K,\xi),$$

где $\beta_i > 0, i = 1,...,n$ (их можно интерпретировать как проценты налоговых отчислений с прибыли). Определена оценка разброса значений критерия эффективности центра в результате самостоятельных действий подсистем при децентрализованной схеме управления и воздействия внешних факторов

(оценка коллективного риска системы), а также минимальный коллективный риск от самостоятельных действий подсистем (цена децентрализации). Предлагается механизм управления центра, обеспечивающий идеальную согласованность интересов, при которой цена децентрализации равна нулю.

Доказано существование ситуации регулируемого равновесия на нижнем уровне. Вид равновесия, которого достигает нижний уровень, зависит от типа передаваемой центром информации (рассмотрены шесть видов равновесных ситуаций). Исследованы свойства регулируемого равновесия. Рассмотрен вопрос, какая стратегия центра является оптимальной, если центр использует однородные управления и неоднородные управления (разные p_i). Показано, что механизм информационного регулирования с неоднородной стратегией обеспечивает идеальную согласованность интересов, а с однородной стратегией, вообще говоря, не обеспечивает.

Теорема. Оптимальная для центра ситуация неоднородного равновесия при любых положительных коэффициентах $\beta_1,...,\beta_n$ является паретовской точкой для нижнего уровня и глобальным максимумом для центра.

Таким образом, предложенные механизмы информационного регулирования позволяют согласовывать интересы в иерархических системах. При этом разная информированность подсистем приводит не просто к снижению коллективного риска, а к его нейтрализации (цена децентрализации равна нулю).

Список литературы

1. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. М.: ВЦ РАН, 2011.

2. *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.

Оценка коллективного риска в иерархических системах, связанного с децентрализацией управления*

В.А. Горелик, Т.В. Золотова

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия,
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

На основе понятия коллективного риска предложен подход к формализации и решению проблемы устойчивости в иерархических системах с частичной децентрализацией управления. Дана оценка коллективного риска, рассмотрены механизмы управления, приводящие к нейтрализации риска.

В теории управления существуют различные понятия устойчивости или гомеостазиса системы. В данной работе предложен подход к формализации и решению проблемы устойчивости в иерархических системах на основе понятия риска [1, 2, 3].

Риск в широком смысле – это непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации. При этом под обеспечением устойчивости системы подразумевается достижение достаточно низкого уровня риска, оцениваемого величиной возможных потерь, связанных с принятием решений в условиях неполной информации. В отличие от системного риска, под которым понимается оценка риска системы в целом на основе оценок риска ее подсистем, под коллективным риском будем понимать оценку риска системы на основе принципов индивидуального поведения подсистем в условиях риска.

При управлении системами или процессами устойчивость и эффективность их функционирования может быть достигнута путем обработки и использования информации при выборе управляющих параметров так, чтобы в пределах области гомеостазиса критерий эффективности принимал оптимальное значение. Под управлением риском понимается управление системой или процессом, непременным атрибутом которого являются процедуры учета и оценки факторов риска в целях максимального снижения неопределенности при принятии решений и обеспечения устойчивости системы. В данной работе рассмотрены вопросы управления коллективным риском в иерархических системах, функционирующих в условиях внутрисистемной неопределенности, связанной с различной информированностью подсистем в условиях децентрализованного управления.

Принцип оптимальности управления в иерархической системе объединяет стремление к увеличению значения критерия эффективности центра и к достижению устойчивости (или гомеостазиса) функционирования системы, которая описывается совместными ограничениями на параметры

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-91162

подсистем. Основным условием устойчивости и эффективности функционирования в иерархической системе является согласованность интересов всех ее элементов. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Если при этом центр может достичь абсолютного максимума своего критерия эффективности, то интересы элементов системы идеально согласуемы. Таким образом, риск здесь связан не только с воздействием внешней среды, носящим случайный или неопределенный характер, но и что специфично с возможными нескоординированными действиями подсистем, приводящими к нарушению гомеостазиса системы. Информационные аспекты здесь включают вопросы взаимной информированности центра и подсистем, схемы передачи информации, виды и способы описания внешних факторов.

Если фазовое состояние системы x однозначно определяется управлением центра $u \in U$ и вектором управлений подсистем $v \in V$, т.е. $x=f(u,v)$, то условие устойчивости системы $x \in X$, где X - область гомеостазиса системы, может быть представлена в виде

$$(u,v) \in \Gamma \qquad (1)$$

где множество $\Gamma \subseteq U \times V$ представляет собой совокупность управлений, приводящих к устойчивым состояниям (в случае неоднозначности состояний системы множество Γ определяется условиями включения или пересечения множества достижимости с областью гомеостазиса). Множество допустимых управлений центра, гарантирующих выполнение условия устойчивости (1), есть

$$D = \{u \in U \mid (u, v) \in \Gamma \quad \forall v \in R(u)\} \qquad (2)$$

где $R(u) \subseteq V$ множество возможных управлений нижнего уровня при выборе центром управления и передаче некоторой фиксированной информации об этом выборе.

В качестве оценки эффективности системы принимается нижняя грань функционала центра $F(u,v)$: $\inf\limits_{v \in R(u)} F(u,v)$. Это гарантированное значение эффективности зависит от реакции подсистем на управление центра, определяемой центром на основе исходной информации. Отношение центра к риску заключается в определении множества допустимых управлений, обеспечивающих гомеостазис системы, и оценки разброса значений эффективности в результате самостоятельных действий подсистем и, возможно, воздействия внешних факторов. В качестве такой оценки будем использовать разность между глобальным максимумом критерия эффективности центра $F^0_{гл}$ при централизованной схеме управления и гарантированным его значением в данной иерархической структуре $F^0_{гл} - \inf\limits_{v \in R(u)} F(u,v)$ (оценка коллективного риска). При гарантированном подходе к оценке эффективности и риска выбор управления должен осуществляется из множества (2), а задача нахождения оптимального управления u^0 и результата F^0 центра имеет вид

$$F^0 = \max_{u \in D} \inf_{v \in R(u)} F(u,v) \qquad (3)$$

Минимальный риск от самостоятельных действий подсистем (неконтролируемых факторов) равен $F^0_{гл} - F^0$ (цена децентрализации).

В работе доказана теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности управления центра, которая опирается на две леммы о суперпозиции вогнутых функций. Оптимальный результат центра может отличаться от глобального максимума его критерия, поэтому важным становится вопрос получения условий идеальной согласованности интересов в системе, т.е. возможности достижения глобального максимума критерия центра при выполнении условий устойчивости. В связи с этим в работе предлагается ряд механизмов управления, позволяющих достичь идеальной согласованности интересов. При этом полученные условия оптимальности используются для нахождения параметров этих механизмов управления и доказательства идеальной согласованности, а в случае невозможности ее достижения – для нахождения оптимального управления центра.

Список литературы

1. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание. М.: ВЦ РАН, 2009.

2. *Горелик В.А., Золотова Т.В*. Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. М.: ВЦ РАН, 2011.

3. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Общий подход к моделированию процедур управления риском и его применение к стохастическим и иерархическим системам // Управление большими системами. Выпуск 37: М.: ИПУ РАН, 2012. С. 5-24.

Непрерывные информационные агрегаты в иерархических играх двух лиц

М.А. Горелов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

Вопросы, связанные с информационными обменами между игроками, рассматривались уже в первых работах по теории игр. Особенно важную роль они играют в теории иерархических игр. С ними тесно связаны вопросы о сложности поведения игроков. В классических моделях иерархических систем не накладывается никаких ограничений ни на сложность поведения субъектов, ни на объемы информации, передаваемой в процессе принятия решений [1]. Однако в дальнейшем стало понятно, что во многих случаях эти ограничения являются весьма существенными. Особенно важными они становятся при переходе от рассмотрения задач анализа иерархических систем к исследованию задач синтеза. Тут возникает проблема математического описания сложности поведения игроков.

Один из способов такого описания рассматривался в [2,3]. Поскольку в этих работах использовалась локальная техника, результаты удалось получить лишь для достаточно узкого класса моделей. Ниже приводится чуть более общая постановка задачи и ее полное решение. Из полученных результатов, в частности, видно, что задача имеет существенно глобальный характер.

Будем рассматривать игру $\Gamma=\langle U,V,g,h\rangle$, где U и V – компактные топологические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U\times V$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций g и h соответственно.

Пусть заданы множество W и отображение $P:V\to W$. Наряду с игрой Γ рассмотрим игру $\Gamma_P=\langle U_P,V_P,g_P,h_P\rangle$, заданную следующими условиями: $V_P=V$, $U_P=\Phi(W,U)$, $g_P(u_P,v_P)=g(u_P(P(v_P)),v_P)$, $h_P(u_P,v_P)=h(u_P(P(v_P)),v_P)$ (здесь и далее $\Phi(X,Y)$ обозначает множество всех функций из X в Y). Будем считать, что W – топологическое пространство, а отображение P непрерывно.

Если первый игрок выберет свою стратегию $u_P\in U_P$ и сообщит ее партнеру, то для второго игрока задача выбора управления станет простой, поскольку получаемый им результат будет однозначно связан с его выбором. Поэтому естественно считать, что множество $B(u_P)$ рациональных ответов второго игрока на стратегию u_P задается условиями:

- $B(u_P)=\{v\in V: h(u_P(P(v)),v)=\max\limits_{v\in V} h(u_P(P(v)),v)\}$, если верхняя грань $\sup\limits_{v\in V} h(u_P(P(v)),v)\}$ достигается;
- $B(u_P)=\{v\in V: h(u_P(P(v)),v)\geq \sup\limits_{v\in V} h(u_P(P(v)),v)-\delta\}$ в противном случае (здесь δ – некоторое положительное число).

Поэтому, выбрав стратегию u_P, первый игрок гарантирует себе выигрыш $\inf\limits_{v\in B(u_P)} g(u_P(P(v)),v)$, а его максимальный гарантированный результат $R(\Gamma)$ равен

$$R(\Gamma)=\sup_{u_P\in\Phi(W,U)}\inf_{v\in B(u_P)} g(u_P(P(v)),v).$$

Этой величиной мы и будем описывать эффективность способа агрегирования информации.

Сложность поведения игроков будем описывать размерностью пространства W в смысле Лебега–Чеха (размерность в смысле покрытий). Чтобы избежать тривиальных патологических решений будем предполагать пространство W нормальным.

Естественно возникает вопрос о поиске таких способов обмена информацией, при которых эффективность управления была бы достаточно высокой, а сложность поведения игроков – не слишком большой. Таким образом, приходим к следующей паре двойственных задач.

Задача (I). Задано число γ. Требуется найти нормальное топологическое пространство W и непрерывную функцию $P:V\to W$ такие, чтобы соответствующее квазиинформационное расширение Γ_P удовлетворяло условию $R(\Gamma_P)\geq\gamma$, а размерность пространства W была наименьшей.

Задача (II). Задано неотрицательное целое число m. Требуется найти нормальное топологическое пространство W, размерность которого не превосходит m, и непрерывную функцию $P:V\to W$ такие, чтобы величина $R(\Gamma_P)$ была максимальной.

Решение этих задач в общем виде достаточно сложно, поэтому целесообразно начать с рассмотрения частного случая антагонистических игр. С игрой $\Gamma=\langle U,V,g,h\rangle$ естественно связать антагонистическую игру вида $\Gamma^a=\langle U,V,-h,h\rangle$. Решение задачи (I) для такой игры дается следующей теоремой.

Теорема 5. m-мерное нормальное пространство W и непрерывная функция $P:V\to W$, для которых выполняется неравенство $\inf\limits_{u_P\in\Phi(W,U)}\sup\limits_{v\in V} h(u_P(P(v)),v)<\lambda$ существуют тогда и только тогда, когда найдутся

элементы $u_1,u_2,..,u_n$ множества U, открытые подмножества $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ пространства V и непрерывные функции $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_k$ из V в $\mathbb{R}$ такие, что

- $\bigcup_{i=0}^{k}\Omega_i = V$;
- покрытие $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ вписано в покрытие $O(u_1),O(u_2),...,O(u_n)$;
- кратность покрытия $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ не превосходит $m+1$;
- $\varphi_i(v)>0$, при $v\in\Omega_i$, $\varphi_i(v)=0$, при $v\in V\backslash\Omega_i$.

Полное доказательство этой теоремы приведено в [4].

Анализ этого доказательства позволяет заключить, что среди решений рассматриваемой задачи непременно найдется такое, что пространство W представляет собой симплициальный комплекс, а отображение P сюръективно. Наличие столь простых решений можно считать серьезным аргументом в пользу рассматриваемых постановок задач.

Решение задач для общих (неантагонистических) игр получается из следующих двух лемм.

Лемма 1. Пусть $m\geq 0$ и при этом m максимальный гарантированный результат первого игрока в оптимальном решении задачи (II) для игры Г равен γ, а максимальный гарантированный результат первого игрока в оптимальном решении задачи (II) для игры Γ^a равен $-\lambda$. Обозначим $D^*=\{(u,v)\in U\times V: h(u,v)\geq\lambda\}$. Тогда

$$\gamma \leq \gamma^* = \max_{(u,v)\in D^*} g(u,v).$$

Лемма 2. Пусть $m>0$ и при этом m максимальный гарантированный результат первого игрока в оптимальном решении задачи (II) равен γ, а максимальный гарантированный результат первого игрока в оптимальном решении задачи (II) для соответствующей антагонистической игры Γ^a равен $-\lambda$. Обозначим $D=\{(u,v)\in U\times V: h(u,v)>\lambda\}$. Тогда

$$\gamma \geq \gamma_* = \sup_{(u,v)\in D} g(u,v).$$

Доказательство леммы 1 не сложно и основывается непосредственно на определении максимального гарантированного результата.

Доказательство леммы 2 может быть получено, исходя из следующих соображений. Можно убедиться, что, как и во многих аналогичных моделях, в игре Γ_P одна из оптимальных стратегий первого игрока имеет следующую структуру: фиксируется пара $(u_0,v_0)\in U\times V$ взаимовыгодных управлений игроков, и в случае выбора $v=v_0$ первый игрок обещает выбрать $u=u_0$, а в противном случае угрожает наказанием. Поэтому оптимальный способ обмена информацией должен, во-первых, позволять контролировать выполнение условия $v=v_0$, а во-вторых, давать достаточно информации для эффективного наказания. Для выполнения второго условия подходящее множество информационных агрегатов дает решение задачи для антагонистической игры Γ^a. Как отмечалось, в качестве такого решения может быть взят симплициальный комплекс. Это обстоятельство позволяет выполнить и первое условие. Для этого найденный комплекс нужно расширить, добавив к нему новую вершину, в которую будет отображаться точка v_0, и необходимое число граней больших размерностей, обеспечивающее непрерывность отображения P. Явные построения показывают, что это можно сделать без увеличения размерности комплекса.

Можно показать, что для типичных игр выполняется равенство $\gamma_*=\gamma^*$. Для таких игр леммы 1 и 2 дают полное решение задачи. В исключительных случаях может выполняться условие $\gamma_*<\gamma^*$. В таком случае решение рассматриваемых нами задач может быть более сложным. До конца этот случай в данное время не исследован.

Отметим, что в типичном случае оптимальное множество W всегда конечномерно. Этот результат не тривиален, поскольку относительно размерностей пространств U и V никаких предположений не делалось.

В лемме 2 оставлен без рассмотрения случай $m=0$. В этом случае описанные выше рассуждения не годятся, но можно использовать другие, более простые соображения. При $m=0$ пространство W непременно будет состоять из конечного числа точек, по одной для каждой компоненты связности множества V.

Полученные результаты позволяют свести решение задач (I) и (II) к вычислению кратных максиминов на множествах U и V, впрочем, довольно сложных.

Те же результаты позволяют явно находить решения задач (I) и (II), по крайней мере, в простых примерах. Анализ этих примеров показывает, что решения этих задач демонстрируют определенное структурное разнообразие. По-видимому, это также является аргументом в пользу рассматриваемых постановок задач, поскольку жизнь демонстрирует большее разнообразие, чем решения классических задач без ограничений на сложность.

Список литературы

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. *Алиев В.С., Кононенко А. Ф.* Об агрегировании в динамических играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35, № 8. С. 1245–1259.
3. *Алиев В. С., Кононенко А. Ф.* Некоторые вопросы принятия решений в играх двух лиц при агрегированной информации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37, № 10. С. 1163–1173.
4. *Горелов М.А.* Непрерывные информационные агрегаты в антагонистических играх // Динамика неоднородных систем. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008. С. 41–57.

Многокритериальная коалиционная модель принятия решений с различными предпочтениями игроков

К.В. Григорьева, П.Г. Шайкина

СПбГУ ПМ-ПУ, Санкт-Петербург, Россия

Введение

Имеется группа агентов и совокупность каких-либо проектов. Это могут быть объекты строительства, транспортные маршруты, государства в международной политике или любые другие проекты, где требуется участие так называемых агентов. Агенты принимают решение участвовать в проекте или нет. При этом принятие решения каждого агента по каждому проекту сопряжено с затратами (доходами), отличными от нуля, которые следует минимизировать (максимизировать). Более того, для каждого проекта производится оценка затрат (доходов) по нескольким параметрам, следовательно задача является многокритериальной. Агенты могут создавать коалиции с целью получения более высокого дохода. Соответственно возникает многокритериальная задача оптимизации, которую можно решить с помощью теоретико-игровой модели в смешанных стратегиях, которую будем называть многокритериальной коалиционной моделью принятия решений на множестве проектов с различными предпочтениями игроков.

1. Постановка задачи

Пусть $N=\{1,\ldots,n\}$ – множество игроков, а $M=\{1,\ldots,m\}$ – множество проектов. Обозначим через $X_i=\{0;1\}$ – множество стратегий x_i игрока i, $i=\overline{1,n}$, где $x_i=0$ – отрицательное решение игрока *i* по некоторому проекту или $x_i=1$ – положительное решение. Набор чистых стратегий, выбранных агентами для некоторого проекта, образует ситуацию $x=(x_1,\ldots,x_n)$ игры между агентами. Множество $X=\prod_{i=\overline{1,n}} X_i$ – множество ситуаций игры. На множестве ситуаций в чистых стратегиях для каждого игрока i, $i=\overline{1,n}$, определена вектор-функция выигрыша $\mathbf{K}_i$: $X\to R^r$.

Таким образом, имеем многокритериальную бескоалиционную игру *n* лиц $G_j(x)$:

$$G_j(x)=\left\langle N,\ \{X_i\}_{i=\overline{1,n}},\{\mathbf{K}_i(x)\}_{i=\overline{1,n},\ x\in X}\right\rangle,\quad j=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Пусть заданы для каждого игрока *i* коэффициенты предпочтения λ_i^s, $s=\overline{1,r}$ (их можно найти с помощью ранжирования параметров по степени важности [1]). Согласно методу весовых коэффициентов многокритериальной оптимизации, можно свести многокритериальную бескоалиционную игру *n* лиц $G_j(x)$ к бескоалиционной игре в нормальной форме $\tilde{G}_j(x)$:

$$\tilde{G}_j(x)=\left\langle N,\ \{X_i\}_{i=\overline{1,n}},\{\tilde{K}_i(x)\}_{i=\overline{1,n},\ x\in X}\right\rangle,\quad j=\overline{1,m}, \tag{2}$$

где $\tilde{K}_i(x)=\sum_{s=1}^{r}\lambda_i^s K_i^s,\ \ K_i^s\in\mathbf{K}_i,\ s=\overline{1,r}$.

Смешанная стратегия игрока *i* – это вектор вероятностей выбора *i*-м игроком своих чистых стратегий: $\mu_i=\{\xi(x_i)\}_{x_i\in X_i}$, $\xi(x_i)\ge 0\ \ \forall\ x_i\in X_i$, $\sum_{x_i\in X_i}\xi(x_i)=1$. Набор смешанных стратегий, выбранных игроками для некоторого проекта, образует ситуацию μ игры между игроками в смешанных стратегиях.

Пусть теперь задано коалиционное разбиение Σ^j множества *N* агентов для каждого проекта $j=\overline{1,m}$:

$$\Sigma^j = \{S_1, \ldots, S_l\},\ l \le n,\ n = |N|,\ S_k \cap S_q = \varnothing\ \forall\ k \ne q,\ \bigcup_{k=1}^{l} S_k = N$$

с целью получения более высокого дохода.

Тогда получаем *m* одновременных коалиционных игр *l* лиц в нормальной форме $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$, $j = \overline{1, m}$, ассоциированных с бескоалиционной игрой $\tilde{G}_j\left(x\right)$:

$$G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right) = \left\langle N, \left\{\tilde{X}_{S_k}\right\}_{k=\overline{1,l},\, S_k \in \Sigma^j}, \left\{H_{S_k}\left(\tilde{x}\right)\right\}_{k=\overline{1,l},\, S_k \in \Sigma^j, \tilde{x} \in \tilde{X}} \right\rangle,\ j = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где $\tilde{X}_{S_k}$ – множество стратегий $\tilde{x}_{S_k}$ коалиции S_k, $k = \overline{1, l}$; стратегия $\tilde{x}_{S_k} = \{x_i\}_{i \in S_k}$ – набор стратегий игроков, входящих в коалицию S_k, $k = \overline{1, l}$; набор стратегий $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_{S_1}, \ldots, \tilde{x}_{S_l}\right) \in \tilde{X}$, $\tilde{x}_{S_k} \in \tilde{X}_{S_k}$, $k = \overline{1, l}$, – ситуация в игре $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$; множество $\tilde{X} = \prod_{k=\overline{1,l}} \tilde{X}_{S_k}$ – множество ситуаций в игре $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$.

Смешанная стратегия $\tilde{\mu}_{S_k} = \left\{\tilde{\xi}\left(\tilde{x}_{S_k}\right)\right\}_{\tilde{x}_{S_k} \in \tilde{X}_{S_k}}$, $\tilde{\xi}\left(\tilde{x}_{S_k}\right) \ge 0\ \ \forall\ \tilde{x}_{S_k} \in \tilde{X}_{S_k}$, $\sum_{\tilde{x}_{S_k} \in \tilde{X}_{S_k}} \tilde{\xi}\left(\tilde{x}_{S_k}\right) = 1$ – вектор вероятностей выбора своих чистых стратегий коалицией S_k, $k = \overline{1, l}$. Множество $\tilde{\mathrm{M}}_{S_k}$ – множество смешанных стратегий $\tilde{\mu}_{S_k}$ коалиции S_k, $k = \overline{1, l}$. Набор стратегий $\tilde{\mu} = \left(\tilde{\mu}_{S_1}, \ldots, \tilde{\mu}_{S_l}\right) \in \tilde{\mathrm{M}}$, $\tilde{\mu}_{S_k} \in \tilde{\mathrm{M}}_{S_k}$, $k = \overline{1, l}$, – ситуация в смешанных стратегиях. Множество $\tilde{\mathrm{M}} = \prod_{k=\overline{1,l}} \tilde{\mathrm{M}}_{S_k}$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях.

Из определения стратегии $\tilde{x}_{S_k}$ коалиции S_k следует, что $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_{S_1}, \ldots, \tilde{x}_{S_l}\right)$ и $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ – одна и та же ситуация в играх $G_j\left(x\right)$ и $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$. Из этого однако не следует, что $\mu = \tilde{\mu}$.

Под выигрышем $H_{S_k}\left(\tilde{x}\right)$ коалиции $S_k \in \Sigma^j$ понимается сумма выигрышей игроков, входящих в эту коалицию:

$$H_{S_k}\left(\tilde{x}\right) = \sum_{i \in S_k} \tilde{K}_i\left(x\right)\quad \forall\, \tilde{x} \in \tilde{X},\ k = \overline{1, l},\ j = \overline{1, m},\ S_k \in \Sigma^j, \tag{5}$$

где $\tilde{K}_i\left(x\right)$, $i \in S_k$, – функция выигрыша игрока *i* в ситуации *x* в соответствующей бескоалиционной игре $\tilde{G}_j\left(x\right)$.

Под решением коалиционной игры *l* лиц $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$, $j = \overline{1, m}$, будем понимать ситуацию равновесия по Нэшу $\tilde{x}^*$ в чистых стратегиях или ситуацию равновесия по Нэшу $\tilde{\mu}^*$ в смешанных стратегиях.

Под решением многокритериальной коалиционной модели принятия решений с различными предпочтениями игроков в чистых стратегиях будем понимать пару $\left(\tilde{x}^*, \Sigma^*\right)$, где $\tilde{x}^*$ – ситуация равновесия по Нэшу в коалиционной игре *l* лиц $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^*\right)$, $j = \overline{1, m}$, с компромиссным коалиционным разбиением Σ^*.

Под решением многокритериальной коалиционной модели принятия решений с различными предпочтениями игроков в смешанных стратегиях будем понимать пару $\left(\tilde{\mu}^*, \Sigma^*\right)$, где $\tilde{\mu}^*$ – ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в коалиционной игре *l* лиц $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^*\right)$, $j = \overline{1, m}$, с компромиссным коалиционным разбиением Σ^*.

В качестве дележа внутри коалиций используется обобщенный PMS-вектор [2]–[3].

2. Решение задачи

1. Зафиксируем номер проекта j, $j = \overline{1, m}$. Найдем в коалиционной игре $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$ ситуацию равновесия $\tilde{\mu}^*$ и дележ в этой ситуации, т. е. PMS-вектор [2]–[3].

2. Повторим п. 1 для всех остальных проектов, т. е. получим для каждого проекта *j* ситуацию равновесия в соответствующей коалиционной игре $G_j\left(\tilde{x}, \Sigma^j\right)$.

3. К полученному набору равновесных ситуаций применим алгоритм нахождения

«компромиссного» решения [4] и определим на множестве проектов «компромиссный» проект.

3. Заключение

В работах [5, 6] рассматривались подобные задачи для скалярного случая. В [5] предложена модель принятия решений в условиях задания одной бескоалиционной игры для всех проектов и произвольного задания фиксированного коалиционного разбиения для каждого из проектов. В [6] предложена модель принятия решений в условиях задания различных бескоалиционных игр и фиксированного коалиционного разбиения для каждого из проектов. Таким образом, данную работу следует расценивать как продолжение исследования моделей, предложенных в работах [5, 6].

Список литературы

1. *Кокорина А.В.* Оптимизационный подход в задачах математической диагностики. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. СПб.: СПбГУ, 2004.

2. *Grigorieva, X., Mamkina, S.* Solutions of Bimatrix Coalitional Games. Contributions to game and management // Collected papers printed on the Second International Conference «Game Theory and Management» [GTM'2008] / Edited by Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management, SpbSU, 2009. Pp. 147-153.

3. *Petrosjan, L., Mamkina, S.* Dynamic Games with Coalitional Structures // Intersectional Game Theory Review, 2006. Vol. 8(2). P. 295-307.

4. *Малафеев О.А.* Управляемые конфликтные системы. СПб.: СПбГУ, 2001.

5. *Grigorieva, X.* Static Model of Decision-making over the Set of Coalitional Partitions // Collected papers printed on the Fifth International Conference «Game Theory and Management» [GTM'2011] / Edited by Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management, SpbSU, 2012. Pp. 111-121.

6. *Grigorieva, X.* Coalitional Model of Decision-making over the Set of Projects with Different Preferences of Players // Collected papers printed on the Sixth International Conference «Game Theory and Management» [GTM'2012] / Edited by Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management, SpbSU, 2013. Pp. 172-181.

Кооперативное сильное равновесие в теоретико-игровой задаче об оптимальной развозке

Н.А. Зенкевич, А.В. Зятчин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Исследование теоретико-игровых моделей с применением методов теории графов активно развивается со второй половины 20 века. В последнее десятилетие появились работы, в которых теоретико-игровой подход используется для решения специальных видов транспортных задач. Л.А. Петросян предложил концепцию условно-кооперативного равновесия в одной из таких задач [3]. В.В. Захаров и А.Н. Щегряев исследовали устойчивую кооперацию в задачах маршрутизации транспортных средств [4].

Настоящая работа основана на результатах из [2, 3] и является дальнейшим развитием построений, представленных в [5].

Теоретико-игровая задача об оптимальной развозке

Рассмотрим транспортную сеть G и формализацию теоретико-игровой модели задачи маршрутизации транспортных средств Γ.

Рассмотрим множество точек $V \subset R^2$ на плоскости R^2. На множестве V заданы неотрицательные функции: $d(x) \geq 0$ (спрос), $p(x) \geq 0$ (цена), $x \in V$ и неотрицательная функция транспортных затрат γ: $V \times V \to R^1_+$. Выберем произвольную вершину $a \in V$, которую будем называть депо. Предположим, что $d(a) \equiv 0$ и $p(a) \equiv 0$. Определим транспортную сеть $G(a)$ на графе $Z = (V, E)$ как набор $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a \rangle$.

Рассмотрим простой цикл $r = r(x_0) = (x_0, x_1, x_2, ..., x_l, x_0)$, где $0 \leq l \leq |V|$, $x_0 \equiv a$, $x_i \in V$, $i = 1, ..., l$. Будем называть такой цикл маршрутом.

Определим на сети $G(a)$ теоретико-игровую задачу об оптимальной развозке. Будем назвать такую игру также VRG (от англ. vehicle routing game). Обозначим множество игроков через $N = \{1, ..., n\}$. Будем предполагать, что каждый игрок $i \in N$ владеет множеством транспортных средств (ТС), которое будем

обозначать $T_i = \{t_1^i, ..., t_{v_i}^i\}$, где v_i – количество ТС игрока i. Каждое ТС $t_j^i \in T_i$ характеризуется заданным параметром $c_{ij} > 0$ (грузоподъемность). Предположим, что условие $d(x) \le c_{ij}$ выполнено для всех $x \in X$, $i \in N$, $j \in T_i$.

Определим стратегию игрока i как упорядоченное множество непересекающихся маршрутов $h_i = (r_{i1}, ..., r_{iv_i})$, $r_{ij} = (a, x_1^{ij}, x_2^{ij}, ..., x_{l_{ij}}^{ij}, a)$, для которых выполняется следующее условие $\sum_{m=1}^{l_{ij}} d(x_m^{ij}) \le c_{ij}$, $i \in N$, $j \in T_i$.

Множество стратегий игрока i обозначим через $H_i = H_i[G(a)]$, $H_i = \{h_i\}$. Будем говорить, что любые две стратегии h_i и h_j не пересекаются и писать $h_i \cap h_j = \varnothing$, если любые два маршрута этих стратегий не пересекаются.

Ситуацию $h = (h_1, ..., h_n)$, $h_i \in H_i$, $i \in N$ будем называть согласованной, если $h_i \cap h_j = \varnothing$ для любых $i \ne j$. Обозначим через H множество всех согласованных ситуаций в VRG. Стратегию коалиции $S \subseteq N$ определим как набор стратегий игроков, входящих в данную коалицию, т.е. $h_S = (h_i)$, $i \in S$. Стратегию дополнительной коалиции $N \setminus S$ обозначим через $h_{-S} = (h_i)$, $i \in N \setminus S$.

Функция выигрыша $K_i(h_i, h_{-i})$ игрока i имеет следующий вид:

$$K_i(h_i, h_{-i}) = \sum_{t=1}^{v_i} \left[-\gamma(x_{l-1}^{it}, a) + \sum_{j=1}^{l_{it}} \left(p(x_j^{it}) d(x_j^{it}) - \gamma(x_{j-1}^{it}, x_j^{it}) \right) \right] = k_i(h_i), \ (h_i, h_{-i}) \in H,$$

где $h_i \in H_i$. Функция выигрыша $K_i(h_i, h_{-i})$ игрока i может рассматриваться как функция прибыли $k_i(h_i)$, где ситуация (h_i, h_{-i}) является согласованной.

Определим теоретико-игровую задачу об оптимальной развозке $\Gamma = \Gamma(a)$ как набор $\Gamma(a) = \langle G(a), N, H, K \rangle$, где $G(a)$ – транспортная сеть, $N = \{1, ..., n\}$ – множество игроков, H – множество согласованных ситуаций, $K = \{K_i\}_{i \in N}$ – множество функций выигрыша игроков.

Решения теоретико-игровой задачи об оптимальной развозке

В игре $\Gamma(a)$ существует несколько различных типов равновесия. В настоящей работе в качестве решения рассматривается сильное равновесие (SE) [1]. В частности, исследуется уточнения сильного равновесия [3, 5].

Пусть задана перестановка π номеров $1, ..., n$, $\pi = (i_1, ..., i_n)$.

Теорема 1. Для каждой перестановки $\pi = (i_1, ..., i_n)$ в игре $\Gamma(a)$ существует сильное равновесие.

Рассмотрим классы решений игры $\Gamma(a)$, основанные на кооперативном поведении игроков. Рассмотрим ситуацию $\bar{\bar{h}} \in H$, на которой достигается максимум суммы функций выигрыша всех игроков $\max_h \sum_{i=1}^{n} K_i(h) = \sum_{i=1}^{n} K_i(\bar{\bar{h}}) = V$, $\bar{\bar{h}} \in H$.

Будем называть такую ситуацию $\bar{\bar{h}}$ кооперативным равновесием (CE). Нетрудно показать, что CE является ситуацией равновесия по Нэшу. Кроме того, это решение всегда существует в чистых стратегиях.

Теорема 2. В игре $\Gamma(a)$ кооперативное равновесие является сильным равновесием.

Список литературы

1. *Aumann, R.J.* Acceptable points in general cooperative n-person games // A.W. Tucker (Ed.), Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study, 40. Princeton NJ: Princeton University Press, 1959. P. 287–324.

2. *Dantzig G. B., Ramser, J. H.* (1959). The truck dispatching problem // Management Science. 1959. T. 6 №1, P. 80-91.

3. *Петросян Л.А.* (2011). Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т.3., В.4. С. 89-98.

4. *Захаров В.В., Щегряев А.Н.* (2012). Устойчивая кооперация в динамических задачах маршрутизации транспорта // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т.4., В.2. С. 39-56.

5. *Zenkevich N.A., Zyatchin, A.V.* Strong equilibrium technique in differential games // Game Theory and Applications. 2011. V. 15. P. 207-224.

Сильно гарантированный дележ в одной линейно-квадратичной игре при неопределенности

К.Н. Кудрявцев

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия

Рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности в нормальной форме, которая отождествляется с кортежем

$$\left\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \right\rangle. \qquad (1)$$

Здесь 1 и 2 – порядковые номера игроков, $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{R}^{n_i}$ – множество *стратегий* x_i у *i*-го игрока, пара $x=(x_1,x_2)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2$ называется *ситуацией* игры (1), $\mathrm{Y}\subseteq \mathrm{R}^m$ – множество значений y, принимаемых нестохастическими неопределенными факторами, $f_i(x,y)$ – скалярная функция выигрыша *i*-го игрока $(i=1,2)$.

Игра протекает следующим образом. Игроки совместно и согласованно выбирают свои стратегии, в результате чего складывается ситуация $x=(x_1,x_2)$. Независимо от действий игроков реализуется конкретное значение неопределенного фактора $y\in\mathrm{Y}$. На образовавшейся в результате паре $(x,y)\in\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ каждый *i*-ый игрок $(i=1,2)$ вычисляет свой *предварительный выигрыш* – значение функции выигрыша $f_i(x,y)$ на сложившейся паре. На следующем этапе игры, игроки перераспределяют между собой образовавшийся суммарный выигрыш $f_1(x,y)+f_2(x,y)$. Полученная в результате перераспределения часть суммарного выигрыша и есть *выигрыш игрока i*. Целью *i*-ого игрока является такой согласованный с партнером выбор стратегии x_i, и такое последующее перераспределение суммарного выигрыша, чтобы его окончательный выигрыш оказался по возможности *большим*, учитывая при этом возможность реализации любого значения неопределенного фактора из множества Y.

В отличии от использованного в [1] аналога седловой точки, формализуем решение игры (1) на основе аналога максимина (данный подход применен в [2] для бескоалиционных игр при неопределенности). Для этого предположим возможность *информационной дискриминации* игроков, а именно рассматриваем игру

$$\left\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \right\rangle, \qquad (2)$$

отличающуюся от (1) лишь тем, что Y заменено на Y^{X} – множество всех функций $y(x)$ (*контрситуаций* в терминологии Н.Н. Красовского [3]), заданных на X со значениями в Y, m-вектор-функции $y(x)$ назовем *неопределенностями в игре* (2), а функции выигрыша $f_i(x,y)=f_i(x,y(x))$ $(i=1,2)$.

Партия игры разыгрывается следующим образом. Игроки совместно и согласованно выбирают каждый свою стратегию $x_i\in\mathrm{X}_i$ $(i=1,2)$. В результате образуется ситуация игры (2) – упорядоченный набор стратегий $x=(x_1,x_2)\in\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2$. Предполагаем *информационную дискриминацию* игроков и *дополнительную «информированность»* неопределенности. Именно, по аналогии с иерархическими играми первый ход за игроками: они выбирают свои стратегии $x_i\in\mathrm{X}_i$ $(i=1,2)$ и сообщают об этом ЛПР, «ведающему» построением неопределенностей. Второй ход за указанным ЛПР – он формирует две неопределенности в виде непрерывных на X *m*-вектор-функций $y^{(i)}(x)$ $(i=1,2)$ и сообщает о своем выборе игрокам. При этом предполагается, что неопределенности формируются таким образом, чтобы «максимально испортить» выигрыши отдельно каждому игроку. Игроки, используя эту информацию выбирают ситуацию, доставляющую «хороший» выигрыш (например, гарантированный дележ) каждому из игроков.

Формализацию сильно гарантированного решения проведем в два этапа:

Этап 1. Каждой ситуации $x\in\mathrm{X}$ и каждому игроку $i=1,2$ поставим в соответствие единственную непрерывную на X вектор-функцию $y^{(i)}(x)$ такую, что

$$f_i\left(x, y^{(i)}(x)\right) = \min_{y\in \mathrm{Y}} f_i\left(x, y(x)\right) = f_i[x] \quad (i = 1, 2).$$

Этап 2. Игре (2) сопоставим кооперативную игру двух лиц с побочными платежами (без неопределенностей) – «игру гарантий»

$$\left\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x]\}_{i=1,2} \right\rangle,$$

и найдем для нее гарантированный дележ, а именно ситуацию $x^e = \left(x_1^e, x_2^e\right) \in \mathrm{X}$ и вектор $f^e = \left(f_1^e, f_2^e\right) \in \mathrm{R}^2$, для которых выполнены

во-первых, *условие коллективной рациональности*:

$$\max_{x\in \mathrm{X}}\left(f_1[x] + f_2[x]\right) = f_1\left[x^e\right] + f_2\left[x^e\right];$$

во-вторых, *условие индивидуальной рациональности*: если

$$f_1\left[x^e\right] + f_2\left[x^e\right] = f_1^e + f_2^e,$$

то справедлива система из двух неравенств

$$f_1^e \ge \max_{x_1\in \mathrm{X}_1}\min_{x_2\in \mathrm{X}_2} f_1[x], \quad f_2^e \ge \max_{x_2\in \mathrm{X}_2}\min_{x_1\in \mathrm{X}_1} f_2[x].$$

Полученную в результате пару $\left(x^e, f^e\right) \in \mathrm{X}\times \mathrm{R}^2$ назовем *сильно гарантированным решением* игры (1), при этом x^e есть *сильно гарантирующая ситуация* игры (1), а f_i^e *сильно гарантированный дележ игрока i* $(i = 1, 2)$.

«Игровой смысл» предлагаемого решения состоит в следующем. Если игроки выбрали стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ $(i = 1, 2)$, то каждый *i*-ый из них «обеспечивает» себе выигрыш $f_i(x, y)$, не меньший $f_i[x]$ при реализации любых значений неопределенных факторов $y \in \mathrm{Y}$, то есть $f_i[x]$ есть гарантия для игрока *i* при использовании всеми игроками своих стратегий из ситуации $x \in \mathrm{X}$ и появлении (независимо от их выбора) любой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$.

Предположим, что в игре (1) $\mathrm{X}_i = \mathrm{R}^n$, $\mathrm{Y} = \mathrm{R}^m$ (задача без ограничений), а функции выигрыша линейно-квадратичны по x_i, y и имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x_1'A_{11}x_1 + 2x_1'x_2 + x_2'A_{12}x_2 + \\ &\quad + 2x_1'C_1y + y'D_1y + 2a_1'x_1 + 2b_1'x_2, \\ f_2(x, y) &= x_1'A_{21}x_1 - 2x_2'x_1 + x_2'A_{22}x_2 + \\ &\quad + 2x_2'C_2y + y'D_2y + 2a_2'x_1 + 2b_2'x_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где x_1, x_2 – *n*-вектора (столбцы), y – *m*-вектора-столбец, штрих сверху означает операцию транспонирования, постоянные векторы a_i, b_i и матрицы A_{ij}, C_i, D_i соответствующих размерностей, причем A_{ij} и D_i – симметричны $(i, j = 1, 2)$; далее $A_{ij} < 0$ $(D_i > 0)$ означает, что квадратичная форма $x_j'A_{ij}x_j$ $(y'D_iy)$ определенно отрицательна (соответственно, положительна).

Итак, далее рассматриваем кооперативную игру двух лиц с побочными платежами и при неопределенности

$$\left\langle \{1,2\}, \left\{\mathrm{X}_i = \mathrm{R}^n\right\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}=\mathrm{R}^m, \left\{f_i(x_1, x_2, y) \div (3)\right\}_{i=1,2} \right\rangle, \tag{4}$$

здесь функции выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ определены в (3), стратегиями *i*-го игрока являются *n*-вектора-столбцы $x_i \in \mathrm{R}^n$, неопределенные факторы принимают значения $y \in \mathrm{R}^m$.

Утверждение. Если в (3) матрицы

$$A_{ij} < 0, \quad D_i > 0 \quad (i, j = 1, 2),$$

то сильно гарантированное решение игры (4) существует и имеет вид $\left(x^e, f^e\right)$, где сильно гарантирующая ситуация $x^e = \left(x_1^e, x_2^e\right)$ определяется формулами

$$x_1^e = -\left[A_{11} + A_{21} - C_1D_1^{-1}C_1'\right]^{-1}(a_1 + a_2),$$

$$x_2^e = -\left[A_{12} + A_{22} - C_2D_2^{-1}C_2'\right]^{-1}(b_1 + b_2),$$

а сильно гарантированный дележ – любой вектор $\left(f_1^e, f_2^e\right) \in \mathrm{R}^2$, для которого

$$f_1^e + f_2^e = -\left(a_1' + a_2'\right)\left[A_{11} + A_{21} - C_1 D_1^{-1} C_1'\right]^{-1}\left(a_1 + a_2\right) - \left(b_1' + b_2'\right)\left[A_{12} + A_{22} - C_2 D_2^{-1} C_2'\right]^{-1}\left(b_1 + b_2\right).$$

Список литературы

1. *Жуковский В.И.* Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М: Эдиториал УРСС, 1999.

2. *Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В*. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: URSS, Красанд, 2013.

3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974.

Игровые методы логических вычислений и их приложение*

В.Н. Лебедев, И.А. Башлаева

Волгоградский Государственный Университет, Волгоград, Россия

В работе рассмотрены игровые методы проверки программ. Анализ верификации происходит в рамках логики ветвящегося времени. Данная логика является фрагментом модальной логики. Синтаксис и семантику этой логики можно найти в работе [1].Всякая отдельная переменная является формулой; константы являются формулами. Если F_1 и F_2 -- формулы, то формулами являются выражения следующего вида: $(F_1 \wedge F_2),(F^{\neg}),(X\forall F_1),(F_1 \forall U F_2)$ Формулу $(X\forall F_1)$ назовем универсальной в следующий момент времени и будем читать ее как «в следующий момент времени для любого состояния истинно (F_1)», а формулу $(F_1 \forall U X F_2)$ -- универсальной до тех пор пока, и будем читать « F_1 истинно для любого развития событий, до тех пор пока не станет истинной F_2». Формулы логики ветвящегося времени задаются на некотором крипке-графе. Значением формулы логики ветвящегося времени в любой вершине крипке-графа может быть истина либо ложь и определяется индуктивно по построению формулы, согласно естественному заданию, формальные определения можно найти в работе [1]. Вычисление формул темпоральных логик с помощью методов теории игр. Здесь предлагается обзор основных моментов работ [3], [4]. Пусть есть формула f, и вершина крипке-графа u. Нужно вычислить значение формулы f в этой вершине. Для этого рассмотрим антагонистическую игру двух игроков: первый доказывает, что значение формулы -- истина, а второй опровергает это, т.е. пытается показать, что значение формулы -- ложь. Позициями игры являются всевозможные пары объектов, первый из которых есть подформула формулы f, а второй -- некоторая вершина крипке - графа v. Если подформула в некоторой позиции имеет вид $g \wedge h$, то в ней ходит опровергающий (второй) игрок. Его ходом является выбор очередной позиции: либо g, v, либо h, v. Если текущая позиция имеет вид $X\exists h$, то ходит доказывающий игрок. Очередная позиция тогда будет иметь вид h, w, где w -- произвольная вершина $w \in okr(v)$, которую выберет доказывающий игрок. Если текущая позиция имеет вид $g\exists U h, v$, то вначале ходит опровергающий игрок. Он может выбрать либо очередную позицию g, v, либо же предоставить ход первому игроку в той же самой позиции. Тогда первый игрок выбирает любую позицию следующего вида: $g\exists U h, w;\ w \in okr(v)$ игроку и передает ход второму, опровергающему игроку в этой позиции, либо выбирает очередную позицию h, w и передает ход второму. Если формула имеет вид $h^{\neg}, v$, то очередная позиция будет h, v, и при этом доказывающий и опровергающий игроки меняются ролями, т.е. целью первого игрока будет теперь опровергнуть h, v, а целью второго -- доказать, что она истинна. Игра заканчивается, если повторилась позиция игры, при этом выигрывает опровергающий игрок, либо же если игра пришла в конечную вершину, т.е. в позицию вида x, v, где x -- переменная или константа. В этом случае первый игрок выигрывает, если $x|_v = 1$ или формула – константа 1, в противном случае выигрывает второй игрок. Значение формулы $f\big|_v = 1$, тогда и только тогда, когда в позиции f, v первый игрок имеет выигрыш. Следует из классической теоремы Цермело о

* Работа выполнена при финансовой поддержке ВолгГУ.

ситуации равновесия в играх с полной информацией. Обоснование будет следовать индукцией по построению дерева формул. Рассмотрим самый сложный случай. Пусть текущая позиция имеет вид $g\exists Uh, v$. Пусть значение формулы $g\exists Uh\big|_v = 1$. Следовательно, существует путь в крипке-графе, в конечной вершине которого формула h наконец-то становится равной единице, а подформула g во всех предыдущих вершинах этого пути равна 1. Тогда выигрывающая стратегия первого игрока заключается в выборе этого пути. По предположению индукции в конечной вершине данного пути выигрывает первый игрок. А во всех предыдущих вершинах w второму игроку не выгодно выбирать позицию вида g, w, поскольку в ней он проигрывает. Поэтому он может только передавать ход первому игроку, оставляя формулу той же самой. Пусть, наоборот, значение формулы $g\exists Uh\big|_v = 0$. Тогда возможны два варианта

1) всякий путь, который исходит из вершины v, прежде, чем дать единицу подформуле h, даст ноль подформулы g, и в этой вершине выигрывает второй игрок, выбирая очередную подформулу g в этой вершине;

2) существует путь, на котором вообще нет единиц формулы h.

Тогда первый игрок никогда не выберет позицию с подформулой h, так как в ней он будет проигрывать по предположению индукции. Т.о. рано или поздно повторится позиция вида $g\exists Uh, v$, а тогда выигрывает второй игрок. Если позиция имеет вид $h^{\neg}, v$ то индуктивный шаг очевиден. Доказательство завершено.

Рассмотрим следующую циклическую игру на ориентированном графе без тупиков. Пусть задан граф, вершины которого разбиты на два множества $A, B; A \cup B = V$, а на вершинах графа задана двоичная весовая функция $p : V \to \{0,1\}$

Игра проходит по вершинам графа. Считаем, что есть фишка, которую игроки передвигают по исходящему ребру согласно следующему правилу: В вершинах A фишку передвигает первый игрок, а в вершинах B -- второй игрок. Игра завершается, как только повторяется некоторая вершина на пути, т.е. возникает цикл. Первый игрок выигрывает тогда и только тогда, когда максимальный вес вершин цикла 1, второй, когда -0. К таким играм сводятся рассмотренные темпоральные вычисления (с существенной особенностью сильно связные компоненты однородны- т.е либо целиком из вершин веса 0, или целиком веса 1)

Поэтому алгоритм собственно сводится к поиску сильно связных компонент, имеет сложность $O(|E|)$ [2].

Список литературы

1. *Лебедев В.Н., Черничкин М.С.* Игровой аспект верификации программ// Известия РАН. Теория и Системы Управления, 2005, N 5, С 40-45.

2. *А.Ахо, Дж.Хопкрофт, Дж Ульман* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М: Мир, 1979, 535 с.

3 *Emerson E.A. Jutla C.S.* Tree automata. mu-callculus and determinacy. In Proceedings of 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science. P. 368-377. IEEE Computer Society Press. 1977.

4 *Emerson E.A. Jutlu C.S. Sistla A.P.* On model-checking for fragments of mu-calculus. Fifth International Conference on Computer Aided Verification, Elounda, Greece, June/July 1993.

Вектор Шепли в играх с упорядоченным множеством игроков

М.М. Луценко, Н.В. Шадринцева

Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, Россия

Основной задачей кооперативной теории игр является выработка формально обоснованных решений, приемлемых для всех участников игры [1]. Среди наиболее популярных решений следует выделить вектор Шепли, компоненты которого могут быть интерпретированы как веса игроков в игре. В настоящей работе мы найдём вектор Шепли (в аналитической форме) для кооперативной игры, игроки которой частично упорядочены, и покажем, как методы кооперативной теории игр могут быть применены в педагогике, при назначении весов заданий теста.

Тестирование, как инструмент измерения уровня знаний, давно и успешно применяется в обучении. За последние годы интерес к нему значительно возрос, что вызвано формализацией учебного процесса и развитием компьютерных средств контроля знаний. Появление математических моделей Раша, Бирнбаума и др. существенно расширили теорию и дали возможность использовать современные

математические модели: теорию параметризации педагогических тестов (Item Response Theory) [2], статистические игры [3].

Одной из проблем теории тестирования является задача определения веса задания теста [2]. В большинстве тестов веса заданий считаются равными, но по мере усложнения структуры теста и увеличении числа заданий в тесте, потребность в определении сложности задания теста возрастает. Это особенно важно при сравнении учащихся, решавших разные тесты, или в тех случаях, когда времени на решение всех заданий теста недостаточно.

Так как тесты часто проводятся по завершению части или всего курса обучения, то вполне естественно определить трудность (сложность, вес) задания как время, необходимое для подготовки учащегося к решению этого задания теста. Если учащийся самостоятельно выбирает последовательность изучаемых разделов (с учётом структуры курса и имеющегося у него времени), то за вес задания можно принять некоторое усреднённое время на подготовку к его решению. Такой способ нахождения весов характерен теории игр. Таким образом, проблема назначения веса задания педагогического теста сводится к проблеме построения дележа в некоторой кооперативной игре.

Пусть $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ – множество разделов курса обучения, по которым составлен некоторый тест. Мы предполагаем, что курс A структурирован и его структура определяется двумя функциями $S(\alpha)$, a_α. Первая из них $S(\alpha)$ определяет множество разделов курса непосредственно предшествующих разделу α. Вторая a_α указывает время необходимое для освоения раздела α, если учащийся освоил все разделы из множества $S(\alpha)$.

Определение. Будем говорить, что раздел β курса A следует за разделом α, или раздел α предшествует разделу β и записывать $\alpha<\beta$, если найдутся такие разделы $\alpha=\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k=\beta$ курса A, для которых выполняются следующие утверждения

$\alpha\in S(\gamma_2),\gamma_2\in S(\gamma_3),\ldots,\gamma_{k-1}\in S(\beta)$

Введённое отношение следования (предшествования) обладает свойством транзитивности, то есть для любых трёх разделов $\alpha,\beta,\gamma\in A$ верно следующее утверждение

$$(\alpha<\beta)\&(\beta<\gamma)\Rightarrow(\alpha<\gamma)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что функция непосредственного предшествования $S(\alpha)$ такова, что порождённое ей отношение следования антирефлексивно на множестве разделов A.

Определение. Элемент α назовём максимальным во множестве разделов K курса A ($K\subseteq A$), если не существует раздела $\beta\in K$, для которого $\alpha<\beta$. Множество всех максимальных элементов множества K обозначим через $\max K$.

Пусть α – некоторый раздел курса A. Обозначим через

$$V(\alpha)=\{\beta\in A\,|\,\beta<\alpha\},\ \bar{V}(\alpha)=\{\beta\in A\,|\,\alpha<\beta\}$$

множество разделов курса, предшествующих разделу α, и множество разделов следующих за разделом α соответственно. Если K – множество разделов курса A, то множество разделов предшествующих разделам из множества K обозначим через

$$V(K)=\bigcup_{\alpha\in K}V(\alpha)=\{\beta\in A\,|\,\exists_{\alpha\in K}(\beta<\alpha)\}.$$

Для курса A с введённым на нем отношением следования разделов составим кооперативную игру $\Gamma=\langle A,v\rangle$, значения характеристической функции которой находятся по формуле

$$v(K)=\sum_{\alpha\in K\cup V(K)}a_\alpha \qquad (1)$$

Таким образом, значение $v(K)$ есть время необходимое для изучения разделов из множества разделов K.

Следующая теорема усиливает результат работы [4].

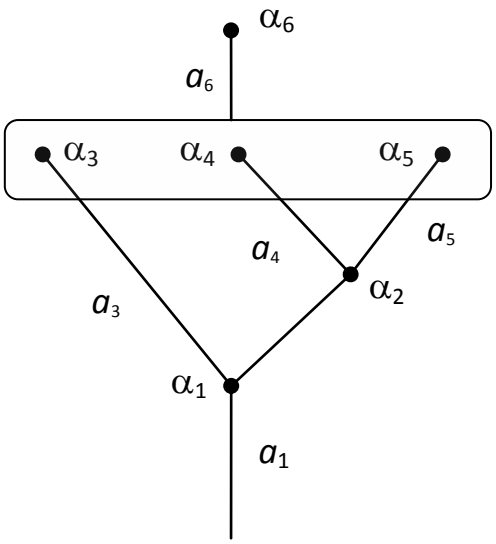
Теорема. В кооперативной игре $\Gamma=\langle A,v\rangle$ с частично упорядоченным множеством игроков A (разделов курса A), и характеристической функцией (1) компоненты вектора Шепли (веса разделов теста) могут быть найдены по формуле

$$w_\alpha=\sum_{\beta\in\{\alpha\}\cup V(\alpha)}\frac{a_\beta}{\bar{m}_\beta+1}, \qquad (2)$$

где $\bar{m}_\alpha=\left|\bar{V}(\alpha)\right|$ – число разделов следующих за разделом $\alpha\in A$.

Учитывая вероятностную интерпретацию вектора Шепли можно сказать, что вес задания w_α теста A есть среднее время подготовки тестируемого к выполнению задания α при равно вероятности всех программ обучения (при равно вероятности всех последовательностей разделов курса A)

Пример. Курс, по которому составлен тест, состоит из 6 разделов. Его структура задаётся схемой, указанной на рисунке. Числа $a_i \geq 0$, $i = \overline{1,6}$ определяют время необходимое для изучения соответствующих разделов при условии, что все предыдущие разделы уже изучены. Таким образом, время на изучение всех разделов курса равно $v(A) = a_1 + a_2 + \cdots + a_6$. Для каждого раздела $\alpha \in A$ укажем множества непосредственно ему предшествующих разделов: $S(\alpha_1) = \varnothing$, $S(\alpha_2) = \{\alpha_1\}$, $S(\alpha_3) = \{\alpha_1\}$, $S(\alpha_4) = \{\alpha_2\}$, $S(\alpha_5) = \{\alpha_2\}$, $S(\alpha_6) = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. По функции $S(\alpha)$ на множестве разделов курса A строим отношение следования разделов. Оно, очевидно, антирефлексивно. Характеристическая функция $v(K)$ строится по формуле (1) для всех 64 подмножеств множества A.



Для каждого раздела $\alpha \in A$ найдём число разделов следующих за ним. Мы будем иметь следующие числа: $\bar{m}_6 = 0$, $\bar{m}_5 = \bar{m}_4 = \bar{m}_3 = 1$, $\bar{m}_2 = 3$, $\bar{m}_1 = 5$. Учитывая структуру курса, найдём компоненты вектора Шепли по формулам (2). В результате мы получим следующие веса разделов курса (задач теста):

$w_1 = a_1/6$; $w_2 = a_1/6 + a_2/4$; $w_3 = a_1/6 + a_3/2$; $w_4 = a_1/6 + a_2/4 + a_4/2$; $w_5 = a_1/6 + a_2/5 + a_5/2$; $w_6 = a_1/6 + a_2/4 + a_3/2 + a_4/2 + a_5/2 + a_6$.

Список литературы

1. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики (учебное пособие). – М.: МАКС Пресс, 2005, 272с.

2. Handbook of Modern Item Response Theory. Edition Win. J. van der Linden, R.K. Hambleton, 1997, Springer – Verlag, New York, p.510

3. *Луценко М.М., Шадринцева Н.В.* О точности педагогического тестирования, // Известия Петербургского университета путей сообщения, СПб.: Петербургский гос. Ун-т путей сообщения, 2011.– Вып 4(29), сс. 250-258.

4. *Lutsenko M. M., Shadrintseva N. V.* The Shapley and Banzaf values for different courses of study, // The Sixth International conference Game Theory and Management, Abstracts, St. Petersburg, 2012, p. 165-169.

О равновесии в некоторых повторяющихся играх

Е.З. Мохонько

ВЦ РАН, Москва, Россия

Данная работа посвящена выяснению необходимых и достаточных условий существования ситуаций равновесия в стратегиях с памятью в повторяющейся игре с непрерывным временем. В каждый момент времени игроки делают свой выбор из множеств, которые также зависят от времени. Этой зависимостью рассматриваемая игра отличается от игры из [1].

Итак, опишем неантагонистическую повторяющуюся игру двух лиц с непрерывным временем, протекающую на отрезке [0,1]. Множество выборов $X_i^t, i = 1,2$ игроков описываются измеримыми функциями $x_i(t)$, $x_i(t) \in X_i(t)$, $X_i(t)$ – замкнутое ограниченное множество $\forall t$.

Функции выигрыша игроков определяются равенствами

$$F_i = \int_0^1 M_i\left(x(t)\right)dt .$$

Здесь $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right) \in X(t) = X_1(t) \times X_2(t)$, функции $M_i, i = 1,2$, непрерывны.

$X(t) = X_1(t) \times X_2(t)$ $\forall t \in [0,1]$ известны игрокам до начала игры.

Рассматривается класс стратегий с памятью

$x_i' = \phi_i\left(x^i(.,t), t\right), t > 0$, где $x^i = \begin{cases} x_1, i = 2 \\ x_2, i = 1 \end{cases}, x^i(.,t) = \left\{x^i(\tau), 0 \le \tau < t\right\}$.

По определению, при $t = 0$ $\phi_i = x_i$.

Содержательно эти стратегии означают, что в любой момент времени t игрок знает о поведении партнера на интервале $[0,t)$.

Обозначим

$$F_i(\varphi) = F_i(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 M_i\left(\varphi_1\left(x_2(.,t), t\right), \varphi_2\left(x_1(.,t), t\right)\right)dt .$$

Стратегии $\left(\varphi_1^0, \varphi_2^0\right)$ образуют ситуацию равновесия, если

$$\begin{aligned} &F_1\left(\varphi_1^0, \varphi_2^0\right) \ge F_1\left(\varphi_1, \varphi_2^0\right) \quad \forall \varphi_1, \\ &F_2\left(\varphi_1^0, \varphi_2^0\right) \ge F_2\left(\varphi_1^0, \varphi_2\right) \forall \varphi_2 \end{aligned} .$$

Обозначим $\min\limits_{x^i(t) \in X^i(t)} \max\limits_{x_i(t) \in X_i(t)} M_i = L_i(t)$.

Будем предполагать, что

множество $D(t) = \left\{x(t) \in X(t) \middle| M_i\left(x_1(t), x_2(t)\right) > L_i(t), i = 1,2\right\}$ не пусто $\forall t \in [0,1]$.

Рассмотрим только такие изменения $X(t)$, при которых выполняется

Предположение 1. Функции $x^0(t)$, $x_i^n(t) \in Arg \min\limits_{x_i(t) \in X_i(t)} \max\limits_{x^i(t) \in X^i(t)} M^i(x_1, x_2)$, $L_i(t)$ измеримы, $\max\limits_{x_1(t) \in X_1(t)} M_1\left(x_1, \tilde{x}_2(t)\right)$, $\max\limits_{x_2(t) \in X_2(t)} M_2\left(\tilde{x}_1(t), x_2\right)$ измеримы при измеримых $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$.

Теорема 1. При выполнении предположения 1 необходимым и достаточным условием существования равновесия в стратегиях с памятью является условие – траектория $x^0(t)$, порожденная этими стратегиями, такова, что $\forall t, \forall i$

$$\int_t^1 L_i(t)\,dt \le \int_t^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt .$$

Доказательство.

Пусть для любого i, для любого $t \in [0,1)$ выполняется

$$\int_0^t M_i\left(x^0(t)\right)dt + \int_t^1 L_i(t)\,dt < \int_0^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt .$$

Тогда стратегии вида

$$\varphi_i^0\left(x^i(.,t), t\right) = \begin{cases} x_i^0(t), x^i(.,t) \quad \textit{т.ч.} \int_0^t M^i\left(x_i^0(t), x^i(t)\right)dt + \int_t^1 L^i(t)\,dt < \int_0^1 M^i\left(x^0(t)\right)dt, \\ \quad x_i^n(t) \in Arg \min\limits_{x_i(t) \in X_i(t)} \max\limits_{x^i(t) \in X^i(t)} M^i(x_1, x_2), \textit{ в противном случае} \end{cases}$$

где $L^i = \begin{cases} L_1, i = 2 \\ L_2, i = 1 \end{cases}$,

образуют ситуацию равновесия.

Если $x^0(t)$ таково, что $\int_0^t M_i\left(x^0(t)\right)dt + \int_t^1 L_i(t)\,dt \le \int_0^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt$,

тогда стратегии вида

$$\varphi_i^0\left(x^i(.,t),t\right)=\begin{cases} x_i^0(t), & x^i(.,t)\equiv x^{0i}(.,t), \\ x_i^n(t)\in Arg\min\limits_{x_i(t)\in X_i(t)}\max\limits_{x^i(t)\in X^i(t)} M^i(x_1,x_2), & x^i(.,t)\neq x^{0i}(.,t), \end{cases}$$

образуют ситуацию равновесия.

Доказательство того, что эти стратегии образуют ситуацию равновесия, не отличается от приведенного в [1] доказательства для случая стационарной траектории и не зависящих от времени множеств выбора. Оно состоит в том, что подсчитывается выигрыш игрока, если он отклонился от договорной траектории и сравнивается с выигрышем, который он получит, если не будет отклоняться. Отклонение не увеличивает выигрыш игрока.

Таким образом, условие:

$x^0(t)$ такое, что $\forall t \int\limits_0^t M_i\left(x^0(t)\right)dt+\int\limits_t^1 L_i(t)\,dt\le\int\limits_0^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt$

или, $\int\limits_t^1 L_i(t)\,dt\le\int\limits_t^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt$

является достаточными условием существования ситуации равновесия в стратегиях с памятью.

Оно также является необходимым условием существования ситуации равновесия в стратегиях с памятью. Действительно, если

$\phi_i^0\left(x^i(.,t),t\right), i=1,2$, образуют ситуацию равновесия и порождают равновесную измеримую функцию $x^0(t)$, то для $\forall t\in[0,1)$ должно выполняться

$$\int\limits_0^t M_i\left(x^0(t)\right)dt+\int\limits_t^1 M_i\left(\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right),\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right)\right)dt\le\int\limits_0^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt$$

или

$$\int\limits_t^1 M_i\left(\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right),\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right)\right)dt\le\int\limits_t^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt\ .$$

Для первого игрока

$\int\limits_t^1 \max\limits_{x_1(t)\in X_1(t)} M_1\left(x_1,\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right)\right)dt\le\int\limits_t^1 M_1\left(x^0(t)\right)dt$, то есть,

$$\int\limits_t^1 \min_{x_2(t)\in X_2(t)}\max_{x_1(t)\in X_1(t)} M_1(x_1,x_2)\,dt\le\int\limits_t^1 \max_{x_1(t)\in X_1(t)} M_1\left(x_1,\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right)\right)dt\le\int\limits_t^1 M_1\left(x^0(t)\right)dt\ ,$$

а, значит,

$$\int\limits_t^1 \min_{x_2(t)\in X_2(t)}\max_{x_1(t)\in X_1(t)} M_1(x_1,x_2)\,dt\le\int\limits_t^1 M_1\left(x^0(t)\right)dt\,,$$

$$\int\limits_t^1 L_1(t)\,dt\le\int\limits_t^1 M_1\left(x^0(t)\right)dt\ .$$

Аналогично, для второго игрока $\int\limits_t^1 L_2(t)\,dt\le\int\limits_t^1 M_2\left(x^0(t)\right)dt$.

Таким образом, условие:

$x^0(t)$ такое, что $\forall t, \forall i \int\limits_t^1 L_i(t)\,dt\le\int\limits_t^1 M_i\left(x^0(t)\right)dt$

является необходимым условием существования ситуации равновесия в стратегиях с памятью. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Кононенко А.Ф.* Постановка задачи. Модель с непрерывным временем // Современное состояние теории иссл. операций: Сб. науч. тр.– М.: Наука, 1979. С.173-179.

Анализ политических процессов и коррупции

1. *С.А. Вартанов, Ю.В. Сосина* О структуре и устойчивости равновесий в модели эндогенного образования коалиций 166
2. *А.А. Васин, П.В. Николаев* Учет морального уровня сотрудников в модели подавления коррупции 167
3. *А.И. Машечкин, Н.М. Новикова* Теоретико-игровая задача вето-голосования с лидером 170
4. *А.И. Рыжкин, А.Б. Усов* Административная коррупция в системе контроля водяного балласта судов 172
5. *Д.А. Шварц* Государственная дума и мера сбалансированности полных знаковых графов 174

О структуре и устойчивости равновесий в модели эндогенного образования коалиций*

С.А. Вартанов, Ю.В. Сосина

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Работа посвящена исследованию модели эндогенного образования коалиций в больших множествах игроков (агентов). Подобные модели применяются в политологии и экономической географии при изучении распределения населения по странам [1] и юрисдикциям внутри страны [2], а также при анализе разбиения избирателей по политическим партиям [3-6]. Агенты описываются идеальными точками x, распределенными на некотором множестве X и характеризующими предпочтения агентов (в зависимости от области применения модели это может быть, например, место жительства агента или наиболее близкая ему политическая программа). Стратегией игрока является выбор коалиции, к которой он присоединится, либо отказ от участия в коалициях. Коалициям соответствуют подмножества игроков, являющихся их сторонниками (и соответствующие множества идеальных точек). Обозначим $I=\{1,\ldots,m\}$ множество непустых коалиций. Каждая коалиция $i\in I$ характеризуется политикой p_i – идеальной точкой, соответствующей «агрегированным» предпочтениям ее участников. Чаще всего, как и в данной работе, политика коалиции определяется как как медиана распределения по идеальным точкам участников коалиции. Размер коалиции r_i равен доле игроков, вошедших в нее. Функция выигрыша игрока возрастает с увеличением размера коалиции и убывает с увеличением расстояния от идеальной точки игрока до стратегии коалиции, в которой он состоит. Формально выигрыш игрока с идеальной точкой x в случае присоединения к коалиции i равен $U(x,r_i,p_i)=R(r_i)-L(|x-p_i|)$, где $R(\cdot)$, $L(\cdot)$ – возрастающие функции. Выигрыш агента, не присоединившегося ни к одной из коалиций, считается нулевым.

Важнейшим вопросом в моделях образования коалиций является устойчивость коалиционной структуры к различным отклонениям как отдельных агентов, так и их групп. Концепции индивидуальной устойчивости соответствуют равновесия Нэша. Согласно [6], множество идеальных точек X в равновесии Нэша разбивается на конечное число непересекающихся интервалов X_i, $i\in I$, и множество X_0, где X_i – носитель коалиции i – однозначно (с точностью до множества игроков меры нуль) соответствует множеству участников коалиции i, а X_0 – множеству игроков, воздержавшихся от присоединения к коалициям. В равновесии выигрыш граничного агента, чья идеальная точка x лежит на границе двух соседних коалиций с носителями X_i и X_{i+1}, одинаков в случае его присоединения как к коалиции i, так и к коалиции $i+1$. Это условие описывается уравнением безразличия граничного агента:

$$U(x,r_i,p_i)=U(x,r_{i+1},p_{i+1}) \qquad (1)$$

Целью данной работы является исследование вопросов существования, структуры и устойчивости равновесий Нэша при неравномерном распределении агентов. Ранее подобное исследование производилось либо для равномерного распределения агентов [4,5], либо для конкретной функции выигрыша агентов [6]. В настоящей работе получены результаты для функций выигрыша общего вида и распределений агентов на множестве идеальных точек $X=[0,1]$, характеризующихся монотонной функцией плотности $f(x)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00778-а).

Показано, что в случае неубывающей функции $f(x)$ коалиции в равновесии Нэша расположены последовательно, а множеству воздержавшихся от присоединения игроков (если они есть) соответствует интервал X_0, лежащий левее всех коалиций. Получены достаточные условия, при которых функция выигрыша граничного агента вогнута по размеру коалиции, что гарантирует, что уравнение безразличия (1) имеет не более двух решений относительно размера правой коалиции при фиксированном размере левой коалиции. Для описания результатов введено понятие минимальной (максимальной) коалиции – коалиции, размер которой определяется меньшим (соответственно, большим) решением (1). Таким образом, любое равновесие Нэша, состоящее из заданного числа коалиций, однозначно описывается размером первой коалиции и типом (минимальная либо максимальная) каждой последующей коалиции относительно предыдущей. Проведенный анализ показал, что в модели заведомо существуют равновесия, состоящие из любого достаточно большого числа минимальных коалиций. Кроме того, для фиксированного числа коалиций не может существовать одновременно равновесие, состоящее только из минимальных коалиций, и равновесие, состоящее только из максимальных коалиций.

Далее рассматривалась проблема коалиционной устойчивости равновесий Нэша. Сначала исследовался вопрос устойчивости равновесий к расколу, то есть к образованию новой коалиции, являющейся собственным подмножеством одной из существующих коалиций, и обеспечивающей бóльшие выигрыши всем своим членам. Показано, что любое равновесие Нэша устойчиво к расколу, если функция выпукла, а вогнута и ее вторая производная убывает. Также показано, что убывание второй производной функции не является необходимым условием устойчивости к расколу, однако при отказе от этого требования вогнутости функции $R(\cdot)$ недостаточно для устойчивости.

Затем исследовалась устойчивость равновесий Нэша к попарному объединению соседних коалиций. Согласно полученным результатам, в случае неубывающей функции $f(x)$, устойчивыми являются равновесия, в которых в каждой паре соседних коалиций хотя бы одна является максимальной. Равновесия, в которых есть соседние минимальные коалиции, также могут быть устойчивыми к локальному объединению. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой паре соседних коалиций размер левой коалиции превышал определенное в работе пороговое значение. Также показано, что для устойчивости равновесия, состоящего только из минимальных коалиций, достаточно, чтобы локальное объединение было невыгодно самой последней (самой правой) паре коалиций.

Список литературы

1. *Alesina A., Spolaore E.* On the Number and Size of Nations //Quarterly Journal of Economics. 1997. №112. P. 1027-1056.

2. *Bogomolnaia A., LeBreton M., Savvateev A., Weber S.* Stability of Jurisdiction Structures under the Equal Share and Median Rules. CORE Discussion Paper. 2005. №32.

3. *Gomberg A.M., Marhuenda F., Ortuño-Ortín I.* Endogenous Platforms: The Case of Many Parties // International Journal of Game Theory. 2005. №2. P. 223-249.

4. *Sosina Y.* Endogenous Formation of Political Structures and Their Stability //ORM2004: Труды, М.: МАКС Пресс, 2004, С. 215-216.

5. *Vasin A., Stepanov D.* Endogenous Formation of Political Parties // Mathematical and Computer Modeling. 2008. № 9-10. С. 1519-1526.

6. *Сосина Ю.В.* Теоретико-игровые модели политической конкуренции: диссертация на соискание степени к. ф.-м. н.: 01.01.09. – М, 2006.

Учет морального уровня сотрудников в модели подавления коррупции*

А.А. Васин, П.В. Николаев

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Различные контролирующие структуры нередко сталкиваются с коррупцией, которая заключается во взаимовыгодном сговоре между проверяемым агентом и проверяющим сотрудником инспекции. Из-за коррупционного сговора проверяемые агенты отклоняются от желаемого с точки зрения организатора инспекции поведения. Для того, чтобы обеспечить желаемое поведение агентов и предотвратить коррупцию, организуется иерархическая структура проверок.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 11-32-00204а1)

Models for corruption suppression with the use of morale quality of employees

A.A. Vasin, P.V. Nikolaev

Moscow State University named after Lomonosov, Moscow, Russia

Government agencies and large corporations meet similar problems related to control of agents dealing with outsiders: citizens under audit of the agency or clients of the company. In such interaction there typically exists a possibility of corruption collusion. In case of collusion controlled agent deviates from correct action from the point of view of organizer. In order to prevent it, agencies and corporations usually organize hierarchical controlling structures. The present paper considers game-theoretic models of such structures and studies a problem of their optimal organization. We consider models with agents, who can behave as honest and risk-neutral rational agents.

Для проведения инспекции организатор может использовать малое число доверенных лиц, разделяющих его цели. Дополнительно привлекаются сотрудники, моральный уровень которых неизвестен. Предполагается, что каждый сотрудник проверяет честно с некоторой вероятностью π, являющейся частной характеристикой его уровня честности. С вероятностью $1-\pi$ инспектор ведёт себя как рациональный риск-нейтральный агент: он готов принять взятку от проверяемого в обмен на «нужный» результат проверки, если это выгодно. В этом случае инспектор максимизирует свой ожидаемый доход с учётом зарплат, штрафов, взяток. Организатор не знает вероятность проведения честной проверки каждым инспектором, но он обладает информацией об общей априорной доле честных проверок на каждом уровне иерархии.

Каждый контролируемый агент 0-го уровня характеризуется значением случайного фактора (например, доходом) $I, I \in [I_{\min,} I_{\max}]$, с известной функцией распределения $F(I)$. Конкретное значение I является частной информацией агента. Агент 0-го уровня должен совершить некоторое действие (уплатить налог) из множества возможных действий T_0, причём каждое действие характеризуется затратами t на его осуществление. Информация об осуществлённом действии поступает к организатору инспекции. Правильное с его точки зрения действие описывается функцией $t_0^*(I)$. Значения случайного фактора I упорядочены по возрастанию затрат агента на правильное действие. Агенты 0-го уровня предполагаются рациональными и риск-нейтральными, поэтому в отсутствие контроля каждый из них выбирает действие $t_0^*(I_{\min})$. Создаваемая контролирующая система имеет 3-х уровневую иерархическую структуру. Предполагается, что руководитель получает в распоряжение 2 нижних уровня проверки, сформированных ранее (например, работавших в инспекции при прежнем руководителе), а на третьем уровне проверки проводят доверенные лица руководителя. Заданы вероятности честных проверок π_i на уровне i, $i = 1,2$.

Непосредственный контроль агентов 0-го уровня проводится инспекторами 1-го уровня. Проверка агента 0-го уровня, совершившего действие t_0, происходит с вероятностью $p_1(t_0)$. В отчете о проверке инспектор должен указать совершенное агентом действие. В ходе проверки он всегда выясняет истинное значение I, однако инспектор с рациональным поведением может за взятку указать в качестве совершенного агентом действия $t_1 < t_0^*(I)$. Если в отчете указывается $t_1 > t_0$, то агент 0-го уровня наказывается штрафом $f(t_1 - t_0)$, где $f > 1$ - заданный коэффициент штрафа. Для контроля над инспекторами 1-го уровня проводятся проверки инспекторами 2-го уровня с вероятностью $p_2(t_0, t_1)$ и т.д. Если проверка на l-ом уровне, проводимая с вероятностью $p_l(t_{0,\dots,} t_{l-1})$, выявляет, что на $l-1$-ом уровне нарушение было не полностью вскрыто, то все агенты нижестоящих уровней $i = 0,1,\dots,l-1$, связанные с данным делом, наказываются по итогам проверки штрафами $f_i(t_l - t_{l-1}),\ f_i > 1$. Проверка на верхнем 3-ем уровне осуществляется доверенными лицами и всегда раскрывает значение $t_3 = t_0^*(I)$. Затраты на одну проверку инспекторами двух нижних уровней составляют, соответственно, c_1 и c_2. Затраты на проверку доверенными лицами намного превышают расходы на проверку прочими инспекторами и составляют $\tilde{c}$.

Стратегией P организации инспекции являются вероятности проверок $p_1(\pi_1, \pi_2, t_0), p_2(\pi_1, \pi_2, t_0, t_1), p_3(\pi_1, \pi_2, t_0, t_1, t_2)$ как функции от сообщений, поступивших с предшествующих уровней. Руководство инспекции минимизирует функцию издержек на проведение проверок при условии обеспечения совершения плательщиками правильного действия. Для упрощения задачи будем рассматривать априорную вероятность честной проверки на первом уровне в интервале

$\pi_1 \in [0,1/f)$. Такая доля инспекторов с честным поведением не позволяет обеспечить правильное действие плательщиков только за счёт проверок инспекторами 1-ого уровня.

Проведём поиск совершенных подыгровых равновесий (СПР, см. [1]), в которых плательщики не уклоняются от правильного с точки зрения центра действия при минимальных издержках на проведение проверок.

Обозначим b_{il} взятку, выплачиваемую агентом уровня i агенту уровня l. Плательщику выгодно уклоняться и вступать в сговор с инспекторами с рациональным поведением на 1-ом и 2-ом уровнях, если найдутся такие $t_0 \le t_1 \le t_2 \le t^*(I)$, $b_{01} \ge 0, b_{02} \ge 0, b_{12} \ge 0$, при которых одновременно выполнены условия

$$\begin{cases} b_{02} + f(t_2 - t_1) + p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) f(t^* - t_2) < f(t^* - t_1) \\ b_{12} + f_1(t_2 - t_1) + p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) f_1(t^* - t_2) < f_1(t^* - t_1) \\ b_{02} + b_{12} > p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) f_2(t^* - t_2) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} b_{01} + f(t_1 - t_0) + p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1)(\pi_2 f(t^* - t_1) + \\ \qquad + (1-\pi_2)(b_{02} + f(t_2 - t_1) + p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) f(t^* - t_2))) < f(t^* - t_0) \\ b_{01} > p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1)(\pi_2 f_1(t^* - t_1) + (1-\pi_2)(b_{12} + f_1(t_2 - t_1) + \\ \qquad + p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) f_1(t^* - t_2))) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & t_0 + p_1(\pi_1,\pi_2,t_0)(\pi_1 f(t^* - t_0) + \\ & \quad + (1-\pi_1)(b_{01} + f(t_1 - t_0) + p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1)(\pi_2 f(t^* - t_1) + \\ & \quad + (1-\pi_2)(b_{02} + f(t_2 - t_1) + p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) f(t^* - t_2))))) < t^* \end{aligned} \quad (3)$$

Плательщику выгодно уклоняться и вступать в сговор с инспектором с рациональным поведением только на 1-ом уровне, если найдутся такие совершённые агентами действия $t_0 \le t_1 < t^*(I)$, и такая величина взятки $b_{01} \ge 0$, при которых одновременно выполнены условия

$$\begin{cases} b_{01} + f(t_1 - t_0) + p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1) f(t^* - t_1) < f(t^* - t_0) \\ b_{01} > p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1) f_1(t^* - t_1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & t_0 + p_1(\pi_1,\pi_2,t_0)(\pi_1 f(t^* - t_0) + (1-\pi_1)(b_{01} + f(t_1 - t_0) + \\ & \qquad + p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1) f(t^* - t_1))) < t^* \end{aligned} \quad (5)$$

Плательщику выгодно уклоняться и не вступать в сговор с инспекторами, если выполнено неравенство

$$p_1(\pi_1,\pi_2,t_0) < 1/f \quad (6)$$

Определение. *Если для любых* $I \in (I_{\min}, I_{\max}]$, $0 \le t_0 \le t_1 \le t_2 < t^*(I)$, *ни одна из систем неравенств (1)-(3), (4)-(5), (6) несовместна, будем говорить, что стратегия P определяет СПР с правильным действием плательщиков.*

Сделаем замену переменных:

$$y_1(\pi_1,\pi_2,t_0) = p_1(\pi_1,\pi_2,t_0),\ y_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1) = p_1(\pi_1,\pi_2,t_0) p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1),$$
$$y_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) = p_1(\pi_1,\pi_2,t_0) p_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1) p_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) \quad (7)$$

Утверждение 1. *Стратегия P определяет СПР с правильным действием плательщиков тогда и только тогда, когда условия*

$$\begin{cases} y_3(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1,t_2) \ge \dfrac{1 - y_1(\pi_1,\pi_2,t_0)\pi_1 f - y_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1)(1-\pi_1)\pi_2(f + f_1)}{(1-\pi_1)(1-\pi_2)} \dfrac{1}{f + f_1 + f_2} \\ y_2(\pi_1,\pi_2,t_0,t_1) \ge \dfrac{1 - y_1(\pi_1,\pi_2,t_0)\pi_1 f}{1-\pi_1} \dfrac{1}{f + f_1} \\ y_1(\pi_1,\pi_2,t_0) \ge \dfrac{1}{f} \end{cases} \quad (8)$$

выполнены для любых $t_0, t_1, t_2 < t_{\max}$. *Если неравенства (8) выполнены строго, то для соответствующей стратегии P не существует никаких СПР, связанных с уклонением плательщиков.*

Поставим задачу минимизации издержек на проверки: $\int_{I_{\min}}^{I_{\max}} (y_1(\pi_1, \pi_2, P, I)c_1 + y_2(\pi_1, \pi_2, P, I)c_2 + y_3(\pi_1, \pi_2, P, I)\tilde{c})dF(I) \to \min_P$ при ограничениях (8). Она эквивалента задаче

$$G^{(1)}(y_1, y_2) = (c_1 - \frac{\pi_1 f}{(1-\pi_1)(1-\pi_2)} \frac{\tilde{c}}{f + f_1 + f_2})y_1(\cdot) + \\ + (c_2 - \frac{\pi_2(f + f_1)}{(1-\pi_2)} \frac{\tilde{c}}{f + f_1 + f_2})y_2(\cdot) + \frac{1}{(1-\pi_1)(1-\pi_2)} \frac{\tilde{c}}{f + f_1 + f_2} \to \min_{\vec{y}} \quad (9)$$

при ограничениях $y_1 \in [1/f, 1], y_2 \in [y_{2\min}(y_1), y_{2\max}(y_1) = y_1]$, где $y_{2\min}(y_1) = \frac{1 - y_1\pi_1 f}{1-\pi_1} \frac{1}{f + f_1}$, $y_{2\max}(y_1) = y_1$. Решая задачу (9) как задачу линейного программирования, получим, что в зависимости от знака производных $G^{(1)'}{}_{y_2}$, $G^{(1)'}{}_{y_1}(y_1, y_{2\min}(y_1))$, $G^{(1)'}{}_{y_1}(y_1, y_{2\max}(y_1))$ оптимальна одна из 7-ми возможных стратегий-кандидатов.

В оптимальных стратегиях в зависимости от соотношения между долями π_1 и π_2 применяется два способа организации инспекции: либо на всех уровнях устанавливаются минимально необходимые для обеспечения правильного действия плательщика вероятности проверки; либо выделяется один «основной» уровень с высокой долей честных проверок, который проверяет с максимальной интенсивностью. Остальные уровни являются «вспомогательными» и обеспечивают недостающее для обеспечения правильного действия плательщика количество честных проверок.

Список литературы

1. *Fundenberg D., Tirole J.* Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1991.

2. *Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С.* Механизмы подавления коррупции // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. С. 10-30.

3. *Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С.* Об оптимальной организации контролирующей структуры // Доклады Российской Академии наук. 2012. Т. 444, № 3. С. 262-265.

Теоретико-игровая задача вето-голосования с лидером

Машечкин А.И.[1], Новикова Н.М.[2]

[1]МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[2]ВЦ РАН, Москва, Россия

В работе рассмотрена проблематика коллективного принятия решений с помощью голосования путем последовательного отвода альтернатив (наложения вето) участниками коллектива [1–3]. Данная процедура обладает существенным преимуществом перед популярным выбором по большинству голосов – она не дискриминирует меньшинство, поскольку при рациональном поведении голосующих она обеспечивает победу варианта, наименее невыгодного для каждого игрока.

Сделано предположение о наличии в коллективе выделенного участника лидера – игрока 1, имеющего возможность формирования последовательности голосования (т.е. порядка ходов) среди членов коллектива [4]. Поставлена задача исследования процедуры голосования с точки зрения этого игрока.

Рассматривается модель с n голосующими, которые должны выбрать одно из n+1 предложений. Последние включают в себя по одному варианту от каждого игрока и одно предложение, не имеющее представителя в голосовании. Таким образом обеспечено наличие неотведенного предложения в любой игре. Игроки последовательно накладывают вето на одну из ещё незаветованных альтернатив. Задача изучается в условиях полной информированности голосующих о предпочтениях друг друга. Для начала предположим, что отношения предпочтений на множестве альтернатив для игроков являются строгими.

Получено необходимое и достаточное условие существования *победного порядка ходов*, т.е. такого расположения голосующих, чтобы лидер мог гарантировать выбор своего предложения. Показано, что вариант лидера побеждает, только если у любой подгруппы остальных голосующих найдется не меньше вариантов, худших предложения лидера, чем участников в подгруппе, и доказано, что при этом условии имеется победный порядок ходов [5].

Для случая выполнения необходимого и достаточного условия описаны способы построения победного порядка ходов в зависимости от ситуаций расположения варианта 1 в предпочтениях ведомых

игроков [6]. В играх, когда у всех ведомых игроков вариант 1 – на третьем с конца месте, все игры с победным порядком ходов найдены в явном виде.

Исследован пример принятия решений советом директоров компании, в уставе которой предусмотрена процедура вето-голосования по вопросам распределения прибыли. С помощью полученного необходимого и достаточного условия существования победного порядка ходов, для соответствующей игры с 5-ю голосующими показано, что лидер коллектива может обеспечить выигрыш своего предложения.

Отметим, что даже при наличии точной информации построить победный порядок ходов для десятка игроков трудно из-за необходимости довольно большого перебора. При этом гипотеза о рациональном поведении игроков плохо подтверждается на практике ввиду того, что много вариантов поведения партнеров должны перебрать и участники, чтобы найти выигрышную стратегию [7]. Вместе с тем число принципиально различных для коллектива альтернатив, если не вдаваться в их детали, как правило, не столь велико (3 – 4, а не 10). Поэтому обычно при принятии решений альтернативы укрупняют (отложив нюансы для дальнейшей проработки), члены коллектива объединяются в группы приверженцев каждой альтернативы и выдвигают своего выборщика. Тогда в голосовании участвуют не все, а только выборщики, которые уже и получают право вето любой из ранее незаветованных альтернатив от лица своей группы.

Формально, такой механизм принятия решений соответствует рассмотренной изначально модели, но теперь другая из принятых гипотез становится дальше от реальности – это гипотеза о строгом порядке предпочтений среди промежуточных альтернатив. Действительно, если для половины группы, которую представляет выборщик, вариант 4 лучше варианта 3, а для другой половины – наоборот, то при принятии решений для группы игрок может ориентироваться как на то, так и на другое отношение предпочтительности между этими – чужими – вариантами, либо они будут для него эквивалентны, либо несравнимы.

Поэтому в докладе подробно изучаются игры 3-х лиц в следующих направлениях. Произведена оценка шансов на выбор предложения 1-го голосующего в зависимости от наличия или отсутствия у него возможности управлять порядком ходов [8]. Рассмотрена игра, в которой 1-й игрок имеет возможность ввести дополнительного игрока (и новое предложение, соответственно). Для неё, в зависимости от выгодности введённого предложения для двух других игроков, получены качественные оценки шансов на победу 1-го игрока [9]. В частности, полученные результаты свидетельствуют о том, что с точки зрения 1-го игрока возможность ввода дополнительного голосующего более выгодна, чем управление порядком ходов, только когда заранее известно, что вариант нового игрока менее предпочтителен, чем предложение 1-го, для 2-го и 3-го игроков одновременно. Для нестрогих предпочтений игроков найдены необходимые и достаточные условия победы варианта 1-го игрока и произведена оценка его шансов обеспечить избрание выгодного ему варианта [8].

Появление неопределенности в предпочтениях лидера несомненно увеличивает шансы принятия одного из выгодных ему решений – он всегда побеждает более чем в 50% игр. Но появление и увеличение количества одинаково предпочтительных предложений у 2-го и 3-го игроков снижают возможность победы 1-го. Также существование нескольких одинаково предпочтительных вариантов решений снижает пользу от формирования порядка ходов 1-м игроком – наибольший прирост в числе побед оно дает для случая полностью определенных предпочтений игроков.

Список литературы

1. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.

2. *Moulin, H.* Prudence versus sophistication in voting strategy // Economic theory. 1981. № 24. P. 398–412.

3. *Mueller, D.C.* Voting by Veto // Public Economics. 1978. № 10. P. 57–75.

4. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

5. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Управление порядком ходов при вето-голосовании. I. Условия принятия заданного решения // Изв. РАН. ТИСУ. 2013. № 1. С. 69-83.

6. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Управление порядком ходов при вето-голосовании. II. Алгоритмы построения оптимального порядка // Изв. РАН. ТИСУ. 2013. № 2. С. 55-82 .

7. *Yuval, F.* Sofisticated voting under the sequential voting by veto // Theory and Decisions. 2002. V. 53. P. 343 – 369.

8. *Машечкин А.И.* Оценка шансов принятия решения первого игрока в условиях голосования путем ветования // Вестн. МГУ. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 4. С. 31–36.

9. *Машечкин А.И., Новикова Н.М.* Дополнительный игрок в задаче о вето-голосовании // Прикладная математика и информатика. 2012. Т. 40. С. 105–121.

Административная коррупция в системе контроля водяного балласта судов

А.И. Рыжкин, А.Б. Усов

ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия

В современном обществе коррупция получила широкое распространение. В сфере природопользования коррупция может нанести непоправимый ущерб состоянию различных экологических систем. Нарастающая в последние десятилетия потребность в водных ресурсах делает проблему коррупции в этой сфере природопользования одной из наиболее значимых. Актуальной задачей является разработка эффективных методов борьбы с коррупцией, как социально-экономическим явлением, посредством ее математического моделирования и всестороннего анализа полученных моделей.

Исследуем статическую двухуровневую теоретико-игровую модель системы контроля водяного балласта судов с учетом коррупционного поведения субъектов, которая включает в себя [1]:

- источник воздействия верхнего уровня (начальник порта, НП);
- источник воздействия нижнего уровня (капитан судна, КС);
- управляемую систему (акватория порта, УС).

Взаимоотношения внутри моделируемой системы устроены следующим образом: НП воздействует на КС, КС на УС. НП и КС вместе можно рассматривать как совокупный источник воздействия на УС, имеющий иерархическую структуру. Предполагается, что в системе имеет место коррупция. НП за взятку ослабляет свой воздействие на КС. Воздействуя на УС, КС преследует свои эгоистические цели, которые, вообще говоря, не совпадают с объективно существующими целями поддержания УС в гомеостазе. Нужен НП, который, воздействуя на КС и УС, способен обеспечить поддержание УС в гомеостазе в условиях коррупции.

Математическая постановка задачи

При загрузке судна в порту в акваторию сбрасываются балластные воды, содержащие загрязняющие вещества (ЗВ). Сброс неочищенного водяного балласта ухудшает состояние водной среды. Целью КС является максимизация прибыли, полученной от фрахта, за вычетом переменных издержек. Как следствие, КС экономически не заинтересован в очистке водяного балласта своего судна. С целью увеличения величины максимально допустимого размера перевозимого груза КС готов предложить взятку НП.

Главной (стратегической) целью НП является поддержание речной системы в гомеостазе, т.е. обеспечение не превышения предельно допустимых концентраций (ПДК) ЗВ в акватории порта. Добиться этого НП может не единственным способом, поэтому, кроме того, он стремится к максимизации своего дохода. НП готов принять взятку при условии, что ПДК ЗВ не будут превышены. За взятку он завышает максимально допустимый размер перевозимого груза. Предполагается, что проводятся проверки деятельности НП, поэтому с некоторой вероятностью факт принятия взятки может быть обнаружен. В этом случае на НП накладывается штраф. В модели предполагается, что вероятность обнаружения факта взятки известна.

НП воздействует на область допустимых управлений КС, т.е. ограничивает максимально допустимую массу перевозимого судном груза. Его целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} &J_{порт}(M,\delta) = C_{порт.расх.} - F_{надзор} - F_{очистка}(V(m)) + \\ &\delta zm - F_{штраф}(z)\delta p + (1-\alpha)V(m)KN \to \max_{M,\delta} \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $C_{порт.расх.}$ - портовые сборы с судна; $F_{надзор}$ - расходы на оплату надзорных за судами органов; $F_{очистка}(V(m))$ - расходы на очистку акватории порта от загрязняющих веществ; $F_{штраф}(z)$ - размер штрафа, накладываемого на НП, при обнаружении факта взяточничества; p - вероятность обнаружения факта взяточничества; α - доля отчислений от платы за сброс водяного балласта в федеральный бюджет; $V(m)KN$ - плата за сброс водяного балласта объема $V(m)$.

Целевая функция КС имеет вид:

$$\begin{aligned} &J_{судно}(m,z) = F_{фрахт}(m) - C_{порт.расх.} - T_{IFO}(m) - \\ &-T_{MGO}(m) - T_{опер.расх.}(m) - T_{тех.обсл.}(m) - \\ &-C_{страх} - \delta zm - V(m)KN \to \max_{m,z} \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $F_{фрахт}(m)$ - функция платы КС за перевозку груза массы m; $T_{IFO}(m)$, $T_{MGO}(m)$ - затраты судна на топливо марок IFO180 и MGO соответственно; $T_{опер.расх.}(m)$ - операционные расходы КС; $T_{тех.обсл.}(m)$ -

отчисления на ремонт и техобслуживание; $C_{страх}$ - расходы на страхование судна и груза.

Задача решается при следующих ограничениях на управления:

- КС

$$M_{\min} \le m \le M^0 ;\ M^0 = M + c\delta z ; \quad (3)$$

$$0 \le z \le z_{\max} ;\ z_{\max} = \delta(M_{\max} - M)/c ; \quad (4)$$

- НП

$$M_{\min} - c\delta z \le M \le M_{\max} - c\delta z \quad (5)$$

$$\delta \in \{0,1\} \quad (6)$$

где $M_{\min}, M_{\max} = const$ - минимально и максимально допустимая грузоподъемность судна; $z_{\max}$ - максимально допустимый размер взятки; c - некоторая постоянная, $c > 0$ - постоянная, характеризующая “эффективность” взятки.

Условие (4) показывает, что КС нецелесообразно предлагать НП взятку больше $z_{\max}$, т. к. НП не сможет увеличить размер максимально допустимой массы перевозимого груза M^0 больше возможной для данного типа судна $M_{\max}$.

Неравенства (5) обеспечивают выполнение условия:

$$M_{\min} \le M^0 \le M_{\max} .$$

Пусть для поддержания УС в гомеостазе достаточно, чтобы в акватории порта не были превышены ПДК ЗВ, определяемых нормативными актами [2], т.е.

$$B \le B_{\max} ; B_{\max} = const , \quad (7)$$

где B есть концентрация ЗВ в акватории порта; $B_{\max}$ - максимально допустимая концентрация ЗВ в акватории порта.

Пусть

$$B = B_0 + V(m)W / A , \quad (8)$$

где $A, B_0, W = const$, W - количество ЗВ, содержащихся в единице сбрасываемого балласта; A - объем внутренних портовых вод; B_0 - некоторая постоянная.

В дальнейшем решается оптимизационная задача (1) - (8), представляющая собой нелинейную задачу условной оптимизации, решаемую с учетом иерархии в отношениях между субъектами управления. В качестве метода иерархического управления в модели (1) - (8) используется метод принуждения [1].

Алгоритм решения задачи основан на построении равновесия по Штакельбергу в игре Гермейера Γ_{1t} с учетом требований поддержания системы в гомеостазе [3].

В общем случае модель (1) - (8) исследуется путем прямого упорядоченного перебора на основе методологии имитационного моделирования.

Заключение

Анализ предложенной модели контроля сбрасываемого водяного балласта позволил сделать следующие выводы:

1. Готовность КС предложить взятку приводит к уменьшению его прибыли. НП, зная, что взятку ему предложат, занижает величину массы груза, разрешенного для перевозки судном при отсутствии взятки.
2. Изменение размера отчислений в федеральный бюджет влияет только на доход НП и не оказывает влияния на его решение о принятии взятки или отказе от нее.
3. КС получает высокий доход в случае, когда коррупция в системе невозможна. Следовательно, КС заинтересован, чтобы НП знал, что взятки в системе невозможны. Для НП при отсутствии должного контроля выгодно наличие коррупции в системе.
4. Борьба с коррупцией возможна как путем ужесточения контроля НП (повышения вероятности обнаружения факта взятки), так и путем одновременного увеличения платы за сброс водяного балласта в акваторию порта.

Список литературы

1. *Усов А.Б.* Модели иерархического управления качеством водных ресурсов. Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2006.
2. Приказ Росрыболовства № 20 "Об утверждении нормативов качества воды водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения" от 18.01.2010.
3. *Угольницкий Г.А.* Иерархическое управление устойчивым развитием. М: Издательство физико-математической литературы. 2010.

Государственная дума и мера сбалансированности полных знаковых графов*

Д.А. Шварц

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

1 Введение

Толчком к написанию работы стали исследования сбалансированности Государственной Думы РФ III созыва (далее Дума), рассматриваемой, как мера сбалансированности соответствующего знакового графа [1,2]. Предполагалось, что вершинами графа будут фракции Думы и этот граф полный, т.е. все фракции находятся между собой в некоторых отношениях, хороших или плохих.

В Думу входило 10 фракций и депутатских групп. Знаки дуг, т.е. взаимные отношения между фракциями и группами, определены в [2] путем анализа результатов многих голосований.

По определению мера сбалансированности может меняться от 0 до 1. Но для ГД РФ результат в большинстве случаев или попадал в интервал от 0.48 до 0.56, или был равен 1. Меньше 0.48 мера сбалансированности не была никогда.

Встает вопрос о близости 0.48 к теоретическому минимуму - насколько несбалансированы были отношения фракций в Думе? Оказалось, что очень близко. Более того, теоретический минимум оказался чуть меньше "практического". Это объясняется тем, что при подсчете меры сбалансированности ГД РФ не учитывались циклы, состоящие из партий, суммарное число голосов которых недостаточно для принятия решения.

Приведен алгоритм для вычисления минимального значения меры сбалансированности полного графа с n вершинами. Результат получен для $n \le 10$. С ростом n время работы программы катастрофически растет - если для *n=9* это 20 минут, то для *n=10* - более суток.

Также произведена попытка подойти к проблеме теоретически. К сожалению, достаточно общих результатов не вышло, но полученные данные позволили высказать несколько гипотез о минимальной мере сбалансированности.

2 Знаковые графы и мера сбалансированности

Далее под словом "граф" понимается именно неориентированный граф без петель.

Знаковым графом называется граф, каждая дуга которого отмечена знаком "+" (положительная дуга) или "-" (отрицательная дуга). Обозначим знак дуги *a* через *sign(a).* Знаковый граф называется полным, если полон исходный граф.

Каждый граф можно сделать знаковым многими способами, расставив знаки на ребрах. Далее обычные графы будут обозначаться рукописными буквами, а множество всех знаковых графов, которые можно получить из графа *G* - G_+.

Первоначально знаковые графы использовались для изучения сбалансированности малых групп [5]. Людям соответствуют вершины графа, а к ребру приписан знак "+", если люди находятся в хороших отношениях, и "-", если в плохих.

Знаковый граф называется сбалансированным, если его множество вершин можно разбить на два подмножества так, что любая дуга, соединяющая вершины из одного множества, имеет знак "+", а дуги, соединяющие вершины из разных подмножеств, - знак "-".

Другой подход к понятию сбалансированности знакового графа предполагает рассмотрение отдельных циклов.

Знаком цикла (пути) (обозначение - *sign(·)*) знакового графа называется произведение знаков всех его дуг. Если знак цикла равен +1, цикл (путь) называется положительным, а если -1, - отрицательным.

Обозначим через *C* (C^+, C^-) множество всех (положительных, отрицательных) простых циклов в графе *G, W* (соответсвенно, W^+, W^-) множество всех (положительных, отрицательных) простых путей в *G*. Назовем индексом сбалансированности *I(G)* сумму знаков всех простых циклов графа G.

Оба подхода связаны следующей известной теоремой.

Теорема [Картрайт-Харари, [4]] Знаковый граф сбалансирован, если и только если любой цикл этого графа положителен.

* Работа выполнена при поддержке лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ.

Для графа с большим числом циклов вероятность того, что случайно выбранный полный знаковый граф сбалансирован, крайне мала. Поэтому интересен вопрос, насколько сбалансирован несбалансированный граф. Один из способов ответа на него - мера сбалансированности [4].

Мера сбалансированности знакового графа *G (b(G))* есть доля простых положительных циклов среди всех циклов *G*, т.е. Очевидно, что $0 \le b(G) \le 1$, причем *b(G)*=1, если и только если все граф сбалансирован.

Мера и индекс сбалансированности графа G связаны соотношением $b(G) = \dfrac{1 + I(G)/C(G)}{2}$

3 Минимум меры и индекса сбалансированности

Обозначим $b_{min}(G_+)$ минимальное значение меры и индекса сбалансированности среди всех способов расставить знаки на дугах графа *G*.

Если в графе G есть пересекающиеся циклы, то $b_{min}(G_+)$ >0. В частности, для полного графа $b_{min}(K_n)$ >0 при *n*>3. С другой стороны, верна следующая лемма, если в *G* есть хотя бы один цикл, то среднее значение меры сбалансированности по всем возможным способам расставить знаки на дугах *G* равно 1/2, а, т.к. минимальное значение ниже среднего, то в не ациклическом графе $b_{min}(G)$ <1/2.

Одна из целей работы - изучение величины $b_{min}(K_n)$.

4. Минимальная мера сбалансированности полных графов: вычисления и гипотеза

Для вычисления меры сбалансированности достаточно вычислить *I(G)* и *C(G)*, причем второе число для полного графа постоянно (и вычеслено в [4]).

Для каждого знакового графа *G* и вершины a существует знаковый граф *G'* с той же мерой сбалансированности, такой, что все ребра, выходящие из a в *G'* положительны. Тогда

I $I(G') = I(G'/a) + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{p \in W(G'/a)} sign(p), > 0$,

$|C(G')| = |C(G'/a)| + \dfrac{1}{2} |W'(G/a)|,$

Сократить перебор простых путей помогает следующее рекуррентное соотношение:

Пусть $S \subset N, a \in S$ и *f(a,S)* - сумма знаков простых путей, заканчивающихся в *a* и проходящих через все вершины *S*. Для удобства будем считать, что *S(a,{a})*=1. Тогда

$$f(a,S) = \sum_{i \in S/a} f(i, S/a) \cdot sign((a,i)).$$

Поэтому для вычисления суммы знаков простых путей для графа на *n* вершинах можно последовательно вычислить функции *f(a,S)* и затем сложить полученные результаты для всех *S*, состоящих из не менее чем двух элементов.

Вычисление меры сбалансированности требует $O(n \cdot 2^n)$ байт памяти и $O(n^2 \cdot 2^n)$ операций.

Для вычисления $b_{min}(K_n)$ нужно найти меру сбалансированности каждого полного знакового графа и вычислить среди них минимальную. Это требует $2^{(n^2-n)/2}$ вычислений меры сбалансированности. Используя соображения симметрии, это число можно сократить до $2^{(n^2-5n)/2}$, что позволяет вычислить $b_{min}(K_n)$ для $n \le 10$, причем для Думы (*n*=10) вычисления заняли чуть меньше суток. Можно сформулировать следующую гипотезу:

Назовем K_n^- полный знаковый граф на *n* вершинах, в котором на всех дугах стоят "-", а $K_{k,m,n}$ - полный знаковый граф на *k+m+n* вершинах, в котором на всех дугах стоит знак "+", кроме дуг, соединяющих первые *k* и следующие *m* вершин.

При $n \ge 5$

1) Если *n* нечетно, то $b_{min}(K_n) = b(K_n^-)$;

2) Если *n* четно, то $b_{min}(K_n) = b(K_{(n-1)/2,(n-1)/2,2})$.

В обоих случаях такой знаковый граф единственен с точностью до симметрии.

Вернемся к Государственной Думе РФ 3-го созыва. Гипотеза подтвердилась - в большинстве случаев мера сбалансированности Думы была либо равна 1 (т.е. имело место четкое разделение на два противоборствующих лагеря), либо близка к теоретическому минимуму (0,482), т.е. Дума была практически несбалансирована.

С точки зрения математики наблюдаемая ситуация тоже логична. В среднем мера сбалансированности равна 0.5, минимальная мера сбалансированности близка к 0.5, а максимальная

равна 1. Поэтому знаковые графы с большой мерой сбалансированности должны компенсироваться многими графами с мерой сбалансированности, меньшей 0.5.

Список литературы

1. *Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И.* Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.), М., Физматлит, 2007.

2. *Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И.* О сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации (1994-2003\,гг.): препринт WP7/2003/02. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2003.

3. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

4. *Harary F., Norman R.Z., Cartwright D.* Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.

5. *Heider F.* Attitude and Cognitive Organization // Journal of Psychology. 1946. Vol. 21. №1.

Рынки и аукционы: анализ и проектирование

1. *Н.Г. Блинов* Теоретико-игровой анализ правил ранжирования рекламодателей в поисковых системах 177
2. *И.П. Богданов, М.Р. Давидсон* Вычислительные аспекты расчёта максимальных значений перетоков в энергосистемах при моделировании узловых нагрузок постоянными мощностями 178
3. *В.М. Горбачук, И.А. Русанов* К поиску общественного благосостояния на рынке бензинов 179
4. *В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый* Имитационная модель олигопольного рынка 181
5. *А.Ю. Кондратьев* Модели сделок с честными стратегиями 183
6. *А.Ю. Филатов, Я.С. Макольская* Ограничение конкуренции на отраслевых рынках: увеличение общественной эффективности и возможные риски 185
7. *А.Ю. Филатов, Ю.М. Соколовский* Монополистическая конкуренция с неоднородным трудом. Модель торговли двух стран 188
8. *А.Ю. Флёрова, Т.А. Нагапетян* Математическая модель монопольного рынка нескольких товаров длительного пользования 190

Теоретико-игровой анализ правил ранжирования рекламодателей в поисковых системах

Н.Г. Блинов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе проводится исследование различных видов позиционных аукционов. Позиционный аукцион – это механизм распределения рекламных позиций в ответе поисковой системы на заданный пользователем запрос. В работе представлены различные виды данных аукционов, а также приведена их классификация. Для исследования в качестве базовой использовалась схема аукциона Викри-Кларка-Гроувза [1].

Для начала рассмотрим случай, в котором рекламодатели декларируют сумму, которую они готовы заплатить поисковой системе за один переход на их сайт, - делают ставку. На основе ставок всех претендентов поисковая система определяет, чьи рекламные объявления попадут на страницу и на какую позицию.

Приведем описание параметров модели: пусть N - число позиций на экране; K - число претендентов, $K > N$; s_k - полезность клика для рекламодателя k; b_k - ставка игрока k, его стратегия; $b = (b_1,...,b_K)$ - вектор ставок рекламодателей; $i = \pi_k(b)$ - позиция игрока k после ранжирования поисковиком; α_i - отношение количества переходов по объявлениям на данной позиции к числу показов (CTR позиции i); $U_k(b) = u_k(b,\pi_k(b)) = \alpha_i s_k - p_i(b)$ - функция выигрыша игрока k, занимающего позицию i, где p_i - платеж игрока, находящегося на позиции i: $p_i = (\alpha_i - \alpha_{i+1})b_{i+1} + p_{i+1}$, $p_N = \alpha_N b_{N+1}$.

Ранжирование рекламодателей зависит от конкретной схемы аукциона. В данной работе рассмотрено два способа ранжирования:

- Одноэтапное ранжирование - по величине ставки;
- Двухэтапное ранжирование:

1. Сначала по величине произведения ставки и коэффициента e_k качества объявления $e_k b_k$ отбираются N рекламодателей, попадающих на страницу результатов [2];
2. Затем отобранные рекламодатели ранжируются по величине ставки.

Получены следующие результаты:

- Аукционы с обоими типами ранжирования формализованы в терминах теории игр;
- Утверждение 1. Для полученных игр честная стратегия является равновесной по Нэшу;
- Утверждение 2. Равновесие в честных стратегиях не является сильным в указанных играх.

Список литературы

1. Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky, Michael Schwarz. *Internet Advertizing and the Generalized Second Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords* // Harvard University, Stanford University, UC Berkeley, 2005.

2. *Сергей Николенко* Аукционы на продажу ключевых слов. Теория экономических механизмов // Computer Science Club, 2008.

Вычислительные аспекты расчёта максимальных значений перетоков в энергосистемах при моделировании узловых нагрузок постоянными мощностями

И.П. Богданов, М.Р. Давидсон

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Объёмы электрической мощности, передаваемые по ветвям энергосистем (объёмы перетоков), не могут превышать определённых граничных значений. Вычисление данных границ играет важную роль при анализе надёжности функционирования энергосистем, при расчёте оптимального распределения нагрузки между электростанциями и при решении задач, связанных с ценообразованием на рынках электроэнергии.

Ограничения на объёмы перетоков обусловлены физическими закономерностями распределения электроэнергии (закон Ома, первый закон Кирхгофа и т.д.) и дополнительными требованиями, отражающими специфику рассматриваемой энергосистемы. Указанные закономерности и требования формализуются как система уравнений, являющихся нелинейными относительно параметров, характеризующих установившийся режим работы энергосистемы (узловых напряжений и мощностей, потоков мощности по ветвям и т.д.), а задача расчёта максимально допустимых значений перетоков формализуется как задача нелинейной условной оптимизации [1].

Подходы, применяемые для решения данной оптимизационной задачи, зависят от физических свойств моделируемой энергосистемы. Существенной характеристикой, влияющей на выбор используемого метода, является вид зависимости мощности, потребляемой нагрузками, от модулей подведённых напряжений. В настоящем докладе рассматривается модель, в которой нагрузки задаются постоянными мощностями, т.е. не зависят от подведенных напряжений.

Для энергосистемы, состоящей из двух узлов, задача поиска экстремумов передаваемой мощности разрешима аналитически [2]. В случае систем, состоящих из большего количества узлов, необходимо применять численные методы. Наиболее распространёнными подходами к решению поставленной задачи являются методы прямого вычисления, методы продолжения решения, подходы, основанные на использовании метода Ньютона с оптимизацией длины шага, последовательное квадратичное программирование, метод модифицированных функций Лагранжа [1]. При этом ряд вопросов, связанных с использованием данных подходов, остаются открытыми. В частности, для методов прямого вычисления актуален вопрос выбора начального приближения, которое бы обеспечило сходимость к решению рассматриваемой задачи (метод может разойтись либо сойтись к точке, не являющейся решением). Для методов продолжения актуален вопрос выбора значений управляющего параметра, регулирующего длину шагов (при слишком больших шагах метод может разойтись, при слишком маленьких шагах для достижения искомого решения потребуется значительное количество итераций). Также остаётся открытым вопрос применимости перечисленных подходов в случае, когда множество допустимых узловых мощностей является невыпуклым [3].

В настоящем докладе проведено сравнение отдельных методов, описаны их достоинства и недостатки. Освещены основные вопросы разработки данных подходов, требующие дальнейшего изучения. Экспериментально исследован вопрос применения результатов, полученных в [4], для построения начального приближения для методов прямого вычисления в случае, когда рассматривается переток в один из узлов энергосистемы.

Список литературы

1. *Богданов И.П.* Математические методы вычисления экстремальных значений мощности в узлах электроэнергетических систем переменного тока // Прикладная математика и информатика. № 37. М.: МАКС Пресс, 2011. С. 51-79.

2. *Van Cutsem T., Vournas C.* Voltage stability of electric power systems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

3. *Тарасов В.И.* Теоретические основы анализа установившихся режимов электроэнергетических систем. Новосибирск: Наука, 2002.

4. *Богданов И.П., Давидсон М.Р.* Определение границ допустимого изменения активной мощности в узле сети переменного тока // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2011. № 2. С. 25-31.

К поиску общественного благосостояния на рынке бензинов

[1]В.М. Горбачук, [2]И.А. Русанов

[1]*Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина*

[2]*Фонд поддержки инфраструктурных мероприятий, Москва, Россия*

На рынке топлива и (бензиновых) добавок взаимосвязи между продуктами и факторами можно описать потоками основных материалов и продуктов бензинового комплекса [1]. Объем Q_o сырой нефти (oil) является основным входом на нефтеперерабатывающий завод. Процесс нефтепереработки дает объем очищенного (refinery) бензина Q_r нескольких типов и объем Q_1 побочных продуктов добычи природного газа. Природный газ – неявный фактор для этих побочных продуктов, а также для процессов производства добавок. Неявный фактор этих процессов – также биомасса (включая кукурузу и рапс) [2]. Эти процессы (processes) дают объем Q_p добавок. Смешивание добавок и очищенного бензина дает объем Q_s автомобильного топлива. Каждый тип очищенного бензина имеет свои качества: некоторые (высокооктановые) хороши для бензинового двигателя, но плохи для окружающей среды; другие – хуже для двигателя, но лучше для окружающей среды; третьи – плохи как для двигателя, так и для окружающей среды. Бензиновые добавки производят с целью поиска компромисса между результатами как для двигателя, так и для окружающей среды.

Чтобы улучшить характеристики очищенного бензина, с моторным бензином смешивают добавки, подчас более дорогостоящие, чем иные бензиновые компоненты. В процессах производства добавок используются несколько входных химикатов Q_l. Многие такие химикаты являются побочными продуктами добычи природного газа, а остальные химикаты можно произвести из природного газа непосредственно. Некоторые химикаты также дополняют побочными продуктами нефтепереработки.

Модель рынка и принятия решений требует знания функций потребительского спроса, предложения переработки (граничной стоимости) и предложения факторов. Потребители требуют разных сортов бензина в соответствии с техническими характеристиками их автомобилей. Функцию спроса на сорт i бензина задает его цена

$$P_{si} = \alpha_{si} - \beta_{si} Q_{si}, \qquad (1)$$

где объемы Q_{s1}, Q_{s2}, Q_{s3} означают потребление обычного (regular), среднесортного (midgrade), высококачественного (premium) бензина соответственно, α_{si}, β_{si} – некоторые параметры. При этом не предполагается замещения между сортами [3], поскольку технология задает соответствующее качество бензина.

Рассматриваемая задача описывается производственными процессами с фиксированными пропорциями (моделью Леонтьева). Поскольку в большинстве процессов производства добавок результирующие химикаты получают на основе двух и более других химикатов, то функцию предложения или граничной стоимости (marginal cost, MC) формулируют через производство одного переработанного продукта (одной добавки). Кривую граничной стоимости для добавки задает функция

$$MC_{pj} = \alpha_{pj} + \beta_{pj} Q_{pj}, \qquad (2)$$

где объемы Q_{p1}, Q_{p2}, Q_{p3} означают производство метил-трет-бутилового эфира (methyl tertiary butyl ether, MTBE), алкилата (alkylate), этанола соответственно, α_{pj}, β_{pj} – некоторые параметры. Эта функция учитывает зарплату и коммунальные услуги, но не учитывает стоимость материальных входов: чтобы получить граничную стоимость производства добавки, стоимость входных химикатов, выраженную на основе затрат на единицу продукта, следует прибавить к стоимости переработки.

Поскольку нефтепереработка разбивает молекулу нефти на много малых молекул, соответствующих типам очищенного бензина, то предложение переработки нефти формулируют через один вход сырой нефти:

$$MC_o = \alpha_o + \beta_o Q_o, \qquad (3)$$

где Q_o – предложение нефти, α_o, β_o – некоторые параметры. Эта функция учитывает зарплату и коммунальные услуги, но не учитывает стоимость материальных входов.

Горизонтальная кривая предложения переработки может наблюдаться в краткосрочном периоде, когда все фирмы имеют одинаковую технологию (например, одинаковый выход бензина на баррель нефти), а цены факторов и коммунальных услуг, зарплаты фиксированы в силу того, что сектор переработки мал относительно рынков труда и коммунальных услуг. В противном случае, если технология переработки является гетерогенной или сектор переработки велик относительно рынков труда, коммунальных услуг и химикатов, то краткосрочная кривая предложения переработки имеет

наклон вверх. Эта кривая становится совершенно неэластичной (вертикальной), когда достигается ограничение мощности (независимо от гетерогенности технологии), когда становится неэластичным рынок предложения труда, коммунальных услуг или химикатов.

Нефтепереработка фактически является набором производственных процессов с фиксированными пропорциями. Большинство решений по смеси продуктов, исходящих от барреля нефти, принимается в долгосрочном периоде, когда выбрана конфигурация производственных процессов с фиксированными пропорциями. Принимающиеся в краткосрочном периоде остальные решения по промежуточным затратам нефти и газа для производства бензина или дизельного топлива, по продаже или внутреннему использованию остатков топливной нефти, по пропорции керосина в бензиновой смеси существенно не изменяются от года к году. Поэтому начальное предположение о фиксированных пропорциях оправдано.

Большинство кривых предложения входных факторов для производства добавок склонно иметь наклон вверх, так как эти факторы – побочные продукты производства природного газа. Кроме того, внутреннее производство побочных продуктов дополняется импортом. Кривую предложения фактора i для производства добавок задает его цена

$$P_{li} = \alpha_{li} + \beta_{li} Q_{li}, \qquad (4)$$

где объемы Q_{l1}, Q_{l2}, Q_{l3} означают предложение бутана, бутилена, природного газа соответственно, α_{li}, β_{li} – некоторые параметры. Если кривые предложения факторов включают один биомассный вход для производства одной добавки, то в больших имитационных моделях важны перерабатывающий комплекс для этанола и кривая предложения сырой нефти. Это лишь будет усложнять базовые соотношения (1)–(4). Цену P_o сырой нефти считаем экзогенной.

Целевая функция максимизации – отраслевое благосостояние. Это прибыль плюс потребительский излишек минус эксплуатационная и материальная стоимость, связанная с переработкой. Общественное благосостояние от продажи продуктов бензина – это сумма дохода продавца и излишка покупателя [4], равная в силу зависимости (1)

$$\sum_{i=1}^{3}[P_{si}Q_{si} + 0.5Q_{si}(\alpha_{si} - P_{si})] = \sum_{i=1}^{3}0.5(P_{si}Q_{si} + \alpha_{si}Q_{si}) = \sum_{i=1}^{3}0.5\, Q_{si}(2\alpha_{si} - \beta_{si}\, Q_{si}) \qquad (5)$$

Стоимость переработки и факторов – это сумма площадей под соответствующими функциями предложения (для нескольких процессов производства добавок, для входов на добавки, для отрасли нефтеперерабоки)

$$\sum_{i=1}^{3}0.5Q_{pi}(\alpha_{pi} + M\,C_{pi}) + \sum_{i=1}^{3}0.5Q_{li}(\alpha_{li} + P_{li}) + 0.5Q_o(\alpha_o + P_o),$$

равная в силу зависимостей (2)–(4)

$$\sum_{i=1}^{3}0.5Q_{pi}(2\alpha_{pi} + \beta_{pi}Q_{pi}) + \sum_{i=1}^{3}0.5Q_{li}(2\alpha_{li} + \beta_{li}Q_{li}) + 0.5Q_o(2\alpha_o + \beta_o Q_o) \qquad (6)$$

Лагранжиан задачи максимизации учитывает функции (5), (6), а также издержки, определяемые произведением P_o и объема Q_o используемой сырой нефти. Кроме того, лагранжиан учитывает то, что потребление добавки i не превышает ее производства [5]:

$$\sum_{i=1}^{3} r_{ji}Q_{pi} \le Q_{lj} + x_j Q_o, \quad j = 1,2,3, \qquad (7)$$

где x_j – выход побочного продукта j на единицу добычи нефти, r_{ji} – производный (derived) спрос на вход фактора j, обусловленный производством данной добавки i.

Смешивание учитывают неравенства

$$\sum_{i=1}^{3} Z_{ji} \le Q_{pj}, \quad j = 1,2,3, \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{3} Z_{ki} \le y_{k-3}Q_o, \quad k = 4,5,6, \qquad (9)$$

где Z_{1i}, Z_{2i}, Z_{3i} – объемы соответственно MTBE, алкилата, этанола (добавки) в сорте i бензина, Z_{4i}, Z_{5i}, Z_{6i} – объемы соответственно бензина каталитического крекинга (catalytic cracker), бензина реформинга (reformer), бензина коксования (coker) в сорте i бензина, y_{k-3} – выход типа очищенного бензина на единицу переработанной нефти. Фиксированные затраты на смешивание компонента не влияют на общее решение.

Потребление Q_{si} сорта i бензина не превышает его предложения:

$$\sum_{j=1}^{3} Z_{ji} + \sum_{k=4}^{6} Z_{ki} \geq Q_{si} \qquad (10)$$

Экологическое ограничение задается неравенством

$$\sum_{j=1}^{3} O_j Z_{ji} + \sum_{k=4}^{6} O_k Z_{ki} \geq K_i Q_{si}\ ,\ i = 1,2,3\,, \qquad (11)$$

где O_j, O_k – октановое (octane) содержание отдельного компонента бензина, K_i – октановый рабочий стандарт для отдельного сорта i бензина.

Суммируя функции (5) и (6), а также учитывая ограничения (7)–(11), получаем лагранжиан, необходимый для анализа рыночного равновесия.

Список литературы

1. *Горбачук В.М., Пепеляев В.А.* Макромодель энергетики и экономического роста / Стохастическое программирование и его приложения в энергетике. Иркутск: Институт систем энергетики имени Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. С. 278–306.

2. *Гасанов А.С., Горбачук В.М.* Виробництво біопалив: математичні моделі та методи // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Дніпропетровськ: ДНУ імені О. Гончара, 2008. С. 83–84.

3. *Gorbachuk V.* Cournot–Nash equilibria and Bertrand–Nash equilibria for a heterogenous duopoly of differentiated products // Cybernetics and systems analysis. 2010. V. 46, № 1. P. 25–33.

4. *Горбачук В.М.* Методи індустріальної організації. Кейси та вправи. Економіка та організація виробництва. Економічна кібернетика. Економіка підприємства. К.: А.С.К., 2010.

5. *Gallagher P.W., Shapouri H., Price J.* Welfare maximization, pricing, and allocation with a product performance or environmental quality standard: illustration for the gasoline and additives market // International journal of production economics. 2006. V. 101. P. 230–245.

Имитационная модель олигопольного рынка

В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый

Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, Россия

В отличие от статических моделей, динамические имитационные модели олигопольных рынков позволяют исследовать их свойства, связанные с переходными процессами из одного стационарного состояния в другое. Такие переходные процессы возникают при изменении правил поведения участников рынка.

В частности поставщики (олигополисты) стремятся максимизировать свою прибыль используя определенные правила своего поведения на рынке. Из-за различий возможностей и различий в правилах поведения отдельных поставщиков могут возникать ситуации с различными ценами на разных рынках и различными прибылями поставщиков. Если правила поведения поставщиков не меняются достаточно длительное время, то ситуация на рынке (цены, объёмы поставляемых и потребляемых товаров) переходит в некоторое стационарное состояние, которое может быть получено и на статической модели. Если же один или несколько поставщиков меняют правила своего поведения на рынке, то после некоторого переходного процесса модель оказывается в другом стационарном состоянии.

Может оказаться, что новое стационарное состояние более выгодно отдельным поставщикам, чем пребывание в предшествующем стационарном состоянии. Однако может оказаться и так, что сам процесс перехода из одного стационарного состояния в другое с его промежуточными ценами на рынке и прибылями поставщиков будет еще более выгоден отдельным поставщикам, чем длительное пребывание в каком-то одном из стационарных состояний.

Рассмотрим граф, состоящий из m узлов, представляющих поставщиков и n узлов, представляющих рынки. Цена $P_j = \pi_j(Q_j)$ на рынке зависит только от объема поставляемого товара Q_j, согласно обратной функции спроса $\pi_j(Q_j) = A_j - B_j Q_j$, при $A_j > 0$, $B_j > 0$.

Поставщик является активным элементом модели и характеризуются следующими переменными, относимыми к единице модельного времени:

$q_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ – объем производимого продукта i-го поставщика.

$C_i = \frac{k_i \cdot q_i^2}{2}$ – переменные издержки i -го поставщика при заданном $k_i > 0$,

$MC_i = \frac{\partial C_i}{\partial q_i} = k_i \cdot q_i$ –предельные издержки i -го поставщика,

$R_{ij} = P_j x_{ij}$ – доходы i -го поставщика в результате поставок на j -ый рынок,

$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P_j x_{ij}$ – суммарные доходы поставщика i в результате поставок на все рынки.

Все переменные во все моменты времени, начиная с начального t_0 имеют неотрицательные значения. Рассматриваемые модели отличаются правилами изменений во времени перетоков между узлами. Приведем два простейших варианта модели.

1. Модель “Вальрас”. Изменение перетоков во времени зависит от разницы между ценой в узле потребления и предельными издержками в узле поставщика, что в частности выражает следующее правило

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = x_{ij}(P_j(Q_j) - MC_i(q_i)) \qquad (1)$$

2. Модель “Курно”. Изменение перетоков во времени зависит от разницы между предельной выручкой в узле потребления

$$MR_{ij}(x_{ij}) = d(x_{ij} P_j(\sum_{l \in V_j} x_{lj})) / dx_{ij}$$

и предельными издержками, что выражает следующее правило

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = x_{ij}(MR_{ij}(x_{ij}) - MC_i(q_i)) \qquad (2)$$

В докладе показано, что прибыли поставщиков, действующих по правилу (1) ниже прибылей этих же поставщиков действующих по правилу (2).

Рассмотрены также смешанные варианты модели, в которых часть производителей ведет себя в соответствии с уравнением (1), а другая часть в соответствии с уравнением (2). В частности показан такой, на первый взгляд парадоксальный факт. В некоторых случаях некоторые поставщики могут получить большую прибыль действуя по правилу (1), чем по правилу (2), когда остальные поставщики действуют по правилу (2). Прибыль определяется как разница между выручкой и величиной переменных издержек $S_i = \overline{R_i} - C_i$.

Еще более интересный эффект связан с переходными процессами из одного стационарного состояния в другое, в случае изменения правила поведения одного или нескольких игроков в процессе прогона модели.

Рассмотрим переключение с одного правила поведения на другое для случая, когда поставщику заведомо выгоднее основную часть времени действовать по правилу (2), чем по правилу (1).

На рис.1 представлена ситуация всего с двумя поставщиками. Поставщик 2 действует все время по правилу (2), а поставщик 1 до момента времени $t = 1,97$ действует по правилу (2), затем переходит на правило (1) до момента времени $t = 2,0$. После чего опять переключается на правило (2). Площадь заштрихованной на графике области А равна потери прибыли поставщика 1 после его перехода на правило (1) и в начальный период его обратного перехода на правило (2). Площадь заштрихованной на графике области В равна дополнительной прибыли в последующий период его обратного перехода на правило (2). Потеря и дополнительная прибыль рассматриваются по отношению к случаю, когда поставщик 1 все время действовал бы по правилу (2).

Представленные результаты имитационного поведения поставщиков - производителей товара на олигопольных рынках иллюстрируют возможные эффекты в изменении ситуации на рынке при смене правил поведения отдельных участников. В определенных ситуациях некоторые игроки могут получать краткосрочные преимущества при выходе из состояния олигопольного равновесия. Расширение объемов поставок у таких игроков может дать им увеличение прибыли, хотя это будет сопровождаться снижением цен. Само снижение цен приведет к падению прибыли у других участников. Данный факт, если он будет осознан и другими поставщиками, будет стимулировать и их выход из состояния олигопольного равновесия, что в конечном итоге приведет к снижению прибыли у всех поставщиков.

Приведенные расчеты иллюстрируют также возможности появления временных преимуществ у отдельных игроков при смене их правил поведения за счет инерционности в изменениях состояний других участников. Данный факт означает возможность получения дополнительных преимуществ за счет

частой смены правил поведения отдельных игроков. Этот факт, осознанный многими участниками, будет стимулировать к частой смене их правил поведения, что в конечном итоге приведет к хаосу на рынках.

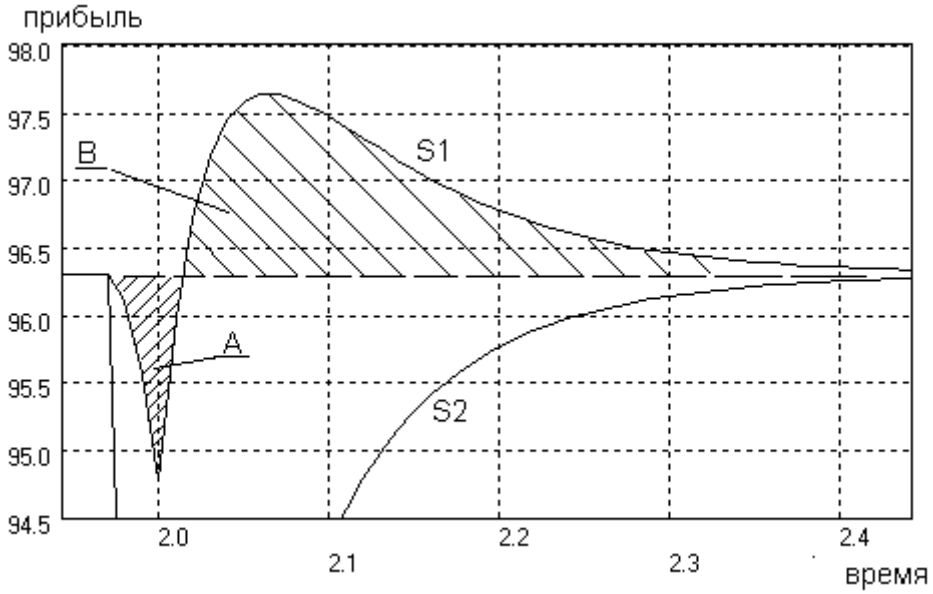


Рис.1. Переход поставщика 1 от правила «Курно» к правилу «Вальрас» и обратно. Кривая S1 – прибыль 1-го поставщика, кривая S2 – прибыль 2-го поставщика.

Следует подчеркнуть, что рассмотренными примерами не исчерпывается все многообразие правил поведения и вариантов возможной смены этих правил. Многие другие варианты изменений правил поведения, очевидно, также могут сопровождаться долгосрочными и временными выигрышами отдельных поставщиков, а также их общим проигрышем и неустойчивой ситуацией на рынках, в конечном счете.

Модели сделок с честными стратегиями*

А.Ю. Кондратьев

ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск, Россия

Работа основана на результатах из [1-3] и является дальнейшим развитием построений в [4-6]. Рассматривается игра двух лиц с неполной информацией, которая относится к модели двойного закрытого аукциона. Игроки здесь продавец и покупатель. Каждый из них обладает приватной информацией о своей резервной цене, которую не знает другой игрок. Для продавца это могут быть затраты на производство товара s, а для покупателя – его оценка данного товара b.

Предположим, что при случайной встрече резервные цены продавцов s и покупателей b есть независимые случайные величины на интервале $[0,1]$ с функциями распределения $F(s)$ и $G(b)$ соответственно (плотностями $f(s)$ и $g(b)$, если они существуют). Игроки появляются на рынке и обьявляют цену на товар (не обязательно совпадающую с резервными ценами). Будем считать их функциями от резервных цен, соответственно $S=S(s)$ и $B=B(b)$. Сделка происходит, если $B\geq S$. Естественно полагать, что $S(s)\geq s$ и $B(b)\leq b$, т.е. продавец завышает, а покупатель занижает истинную цену на продукт, чтобы получить дополнительный доход от сделки. Если сделка состоялась, то примем, что она происходит по цене $(S(s)+B(b))/2$. Выигрышами в игре является разница между резервными ценами и ценой сделки, т.е. для продавца это $(S(s)+B(b))/2-s$, для покупателя $b-(S(s)+B(b))/2$. Поскольку b и s случайные величины, то в качестве выигрышей берутся средние значения. В [5] построено равновесие по Нэшу для случая произвольных распределений для резервных цен. При таком дизайне честные стратегии $S(s)=s$ и $B(b)=b$ не являются оптимальными.

В данной работе предложено несколько моделей, стимулирующих игроков называть свои резервные цены честно. Игроки называют свои резервные цены s и b арбитру (рынок), а друг другу предлагают продать или купить товар по цене S и B.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-91158-ГФЕН_а) и Отделения математических наук РАН (программа «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и новых информационных систем»)

Модель 1. Если сделка не состоялась по вине продавца, то он платит штраф $K_s(s)$. Аналогично штраф покупателя $K_b(b)$. Выигрыши игроков как функция предлагаемой цены есть

$$H_s(S) = \int_{B^{-1}(S)}^{1} (\frac{B(b)+S}{2} - s)g(b)db - K_s(s)(G(S) - G(s)),$$

$$H_b(B) = \int_{0}^{S^{-1}(B)} (b - \frac{B+S(s)}{2}) f(s)ds - K_b(b)(F(b) - F(B)).$$

Для того, чтобы честные стратегии были равновесием, достаточно назначить штрафы

$$K_s(s) = \max_{x\in[s,1]}\{\frac{1-G(x)}{2g(x)} - x\} + s, \quad K_b(b) = \max_{x\in[0,b]}\{\frac{F(x)}{2f(x)} + x\} - b.$$

Модель 2. Пусть игроки получают не весь выигрыш, а только его часть

$$q_s(B,S,s) = \frac{B-S}{B-s}, \quad q_b(B,S,b) = \frac{B-S}{b-S}.$$

Выигрыши игроков в таком случае равны

$$H_s(S) = \int_{B^{-1}(S)}^{1} (\frac{B(b)+S}{2} - s)\frac{B(b)-S}{B(b)-s} g(b)db,$$

$$H_b(B) = \int_{0}^{S^{-1}(B)} (b - \frac{B+S(s)}{2})\frac{B-S(s)}{b-S(s)} f(s)ds.$$

Заметим, что если игроки придерживаются честной стратегии, то в первой модели они никогда не платят штраф, а во второй получают всю долю выигрыша. Таким образом в этих моделях максимизируется суммарный доход продавцов и покупателей и вероятность сделки (среди всех моделей, где пара продавец-покупатель выбирается случайно и все игроки участвуют в сделке). Однако у предложенных моделей есть существенный недостаток: игрокам выгодно обмануть арбитра, назвав ему ложную резервную цену. В следующей модели игрокам уже невыгодно обманывать арбитра.

Модель 3. Игроки решают участвовать ли в аукционе (результатом будет: продавцы с $s \le s_{max}$ и покупатели с $b \ge b_{min}$ участвуют). Игроки получают часть $q_s(S)$ и $q_b(B)$ от цены сделки, платят штрафы и получают возврат штрафов, зависящие от предлагаемых цен S и B, объединённые в функции $R_s(S)$ и $R_b(B)$.

Выигрыш продавца при $S \le B(b_{min})$

$$H_s(S) = \frac{1}{1-G(b_{\min})} \int_{b_{\min}}^{1} (\frac{B(b)+S}{2} q_s(S) - s)g(b)db + R_s(S),$$

а при $S \ge B(b_{min})$

$$H_s(S) = \frac{1}{1-G(b_{\min})} \int_{B^{-1}(S)}^{1} (\frac{B(b)+S}{2} q_s(S) - s)g(b)db + R_s(S).$$

Для конкретных распределений F и G, можно находить s_{max}, b_{min}, и условия, связывающие $q_s(S)$, $q_b(B)$, $R_s(S)$ и $R_b(B)$. Например, при равномерном на интервале $[0,1]$ распределении резервных цен продавцов и покупателей, мы получили, что

$$s_{max} = b_{min} = \frac{1}{2}, R_s(S) \in [\frac{1-4S}{8}; \frac{1}{2}], q_s(S) = \frac{-8R_s(S)+4}{4S+3}.$$

Среди всех возможных решений особое место здесь занимает $q_s(S) \equiv 0$, $q_b(B) \equiv 0$, $R_s(S) \equiv ½$ и $R_b(B) \equiv -½$. Это решение эквивалентно тому, что арбитр устанавливает единую для всех рыночную цену на товар, равную ½.

Список литературы

1. *Chatterjee K., Samuelson W.* Bargaining under incomplete information // Operations Research. 1983. Vol. 31. N 5. P. 835–851.

2. *Myerson R., Satterthwait M.A.* Efficient mechanisms for Bilateral Trading // Journal of Economic Theory. 1983. Vol. 29. P. 265–281.

3. *Myerson R.* Two-Person Bargaining Problems with Incomplete Information // Econometrica. 1984. Vol. 52. P. 461–487.

4. *Мазалов В.В., Токарева Ю.С.* Равновесие в задаче о сделках с неравномерным распределением резервных цен // Математическая Теория Игр и ее Приложения, 2011. Т.3. Вып. 2. С. 37–49.

5. *Мазалов В.В., Кондратьев А.Ю.* Задача о сделках с неполной информацией // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 33–40.

6. *Мазалов В.В., Менчер А.Э., Токарева Ю.С.* Переговоры. Математическая теория. Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, Лань, 2012. - 304 с.

Ограничение конкуренции на отраслевых рынках: увеличение общественной эффективности и возможные риски*

А.Ю. Филатов, Я.С. Макольская

Иркутский государственный университет, Россия

Большинство рынков в современной экономике относятся к рынкам несовершенной конкуренции, на которых каждый производитель в состоянии влиять на цену продукции. При этом высокий уровень концентрации сочетается с дифференциацией продукта (монополистическая конкуренция, олигополия), наличием барьеров входа (монополия, олигополия) и взаимодействием между производителями (олигополия).

Наиболее интересным для исследования типом рыночных структур, в силу большого спектра стратегий поведения участников и нетривиальности выводов, является олигополия [1]. При этом особенности функционирования рынка будут значительно отличаться для дуополии и олигополии с десятком компаний. Существенным фактором, влияющим на степень рыночной концентрации, является высота входных барьеров. Барьеры устанавливаются как укоренившимися на рынке компаниями с целью увеличения степени монопольной власти, так и государством. В частности, государство, может ограничивать число лицензий или разрешений на деятельность в определенных отраслях.

Широко распространенным является мнение, что входные барьеры плохи с точки зрения общественной эффективности, поскольку ограничивают число фирм. А меньшее число фирм – это ослабление конкуренции, повышение цен и сокращение продаж. Однако не следует забывать, что много компаний, работающих на рынке, – это, помимо всех плюсов, еще и многократно дублирующиеся постоянные издержки. При наличии положительного эффекта масштаба небольшое количество фирм, расширяющих производство, может оказаться лучшим для общества вариантом, чем конкуренция большого количества малых фирм. Попробуем сопоставить возникающее на рынке равновесие с общественным оптимумом и ответить на вопрос, могут ли барьеры увеличивать общественную эффективность, а также оценить возникающие риски.

Пусть на рынке однородного продукта со спросом $p = a - bQ$ взаимодействуют n одинаковых олигополистов с издержками $TC_i(q_i) = cq_i + f$. Каждый из них максимизирует собственную прибыль, ориентируясь на поставки конкурентов. Учитывая симметричность, найдем равновесные объемы, цены и прибыли компаний:

$$q^* = \frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b},\ Q^* = \frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b},\ p^* = \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}c,\ \pi^* = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} - f\ .$$

Отыщем равновесное количество фирм из условия нулевой прибыли:

$$n_1 = \sqrt{\frac{(a-c)^2}{bf}} - 1.$$

Построим функцию общественного благосостояния, равную сумме потребительского излишка и совокупной прибыли, и найдем, что общественно эффективное число фирм на рынке всегда меньше равновесного:

$$n_2 = \sqrt[3]{\frac{(a-c)^2}{bf}} - 1 < \sqrt{\frac{(a-c)^2}{bf}} - 1 = n_1\ .$$

При этом побочным эффектом сокращения числа компаний на рынке является возможная смена стратегии их поведения, в частности, увеличивающаяся вероятность сговора. В работе показано, что при высоких постоянных издержках, превышающих 12,8% от величины потребительского излишка в случае совершенной конкуренции, даже неизбежный сговор общественно эффективного числа компаний оказывается предпочтительнее конкуренции равновесного числа фирм.

Найденный выше критический уровень постоянных издержек является высоким и реализуется редко. Однако если известно, что сговор неизбежен, меньшим из зол может оказаться переход от конкуренции избыточного числа фирм, возникающего в равновесии, к монополии. Сравнив общественное

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №12-06-00-280-а.

благосостояние в этих ситуациях, получим, что монополия оказывается меньшим из зол, по сравнению с конкуренцией избыточного числа фирм, когда постоянные издержки превышают 5,6% от величины потребительского излишка в случае совершенной конкуренции.

В случае линейных издержек, при которых справедлива возрастающая отдача от масштаба, обоснованная выше эффективность укрупнения фирм и сокращения их числа была ожидаемым результатом. Проанализируем, будет ли этот же вывод применим и к квадратичным функциям издержек общего вида.

Пусть издержки каждого из n олигополистов, работающих на рынке со спросом $p = a - bQ$, задаются функцией $TC_i(q_i) = dq_i^2 + cq_i + f$. Каждый из них максимизирует свою прибыль, ориентируясь на поставки конкурентов:

$$\pi_i(q_i, q_{-i}) = pq_i - TC_i(q_i) = \left(a - bq_i - b\sum_{j\neq i} q_j\right)q_i - dq_i^2 - cq_i - f \to \max_{q_i}.$$

Приравняв производные к нулю, получим соотношения

$$a - 2bq_i - b\sum_{j\neq i} q_j - 2dq_i - c = 0,$$

откуда, учитывая симметричность фирм, легко найти равновесные цены и объемы:

$$q^* = \frac{a-c}{nb+b+2d}, \quad p^* = a - bQ^* = a - \frac{nb(a-c)}{nb+b+2d}.$$

Прибыль фирм при этом составит

$$\pi^* = p^*q^* - d(q^*)^2 - cq^* - f = \frac{(a-c)^2(b+d)}{(nb+b+2d)^2} - f.$$

Из условия нулевой прибыли можно найти равновесное число фирм

$$\pi^* = 0, \quad \frac{(a-c)\sqrt{b+d}}{nb+b+2d} = \sqrt{f}, \quad n_1 = \frac{(a-c)\sqrt{b+d}}{b\sqrt{f}} - \frac{b+2d}{b}.$$

Заметим, что это число будет положительным, если постоянные издержки не превышают некоторого заградительного уровня, то есть выполняется неравенство

$$f < (a-c)^2 \frac{b+d}{(b+2d)^2} \tag{1}$$

Построим функцию общественного благосостояния и максимизируем ее:

$$SW = RD + n\pi^* = \frac{1}{2}(a - p^*)nq^* + n\pi^* = \frac{1}{2}\frac{n^2 b(a-c)^2}{(nb+b+2d)^2} + \frac{n(a-c)^2(b+d)}{(nb+b+2d)^2} - nf \to \max_n.$$

Приравняв производную к нулю, обозначив $x = nb + b + 2d$, $k = f/(a-c)^2$ и выполнив ряд преобразований, получим

$$SW' = \left(dx + b(b+2d) - kx^3\right)\frac{(a-c)^2}{x^3}.$$

Видимо, что аналитическое вычисление общественно эффективного числа фирм n_2 представляет некоторые сложности. Поэтому попытаемся просто сравнить его с вычисленным выше равновесным значением n_1. Введем функцию

$$g(x) = \frac{x^3}{(a-c)^2} SW' = dx + b(b+2d) - kx^3.$$

Заметим, что благодаря положительности икса функция общественного благосостояния возрастает при положительных значениях $g(x)$, убывает при отрицательных и достигает своего максимума при $g(x) = 0$ (рис.1).

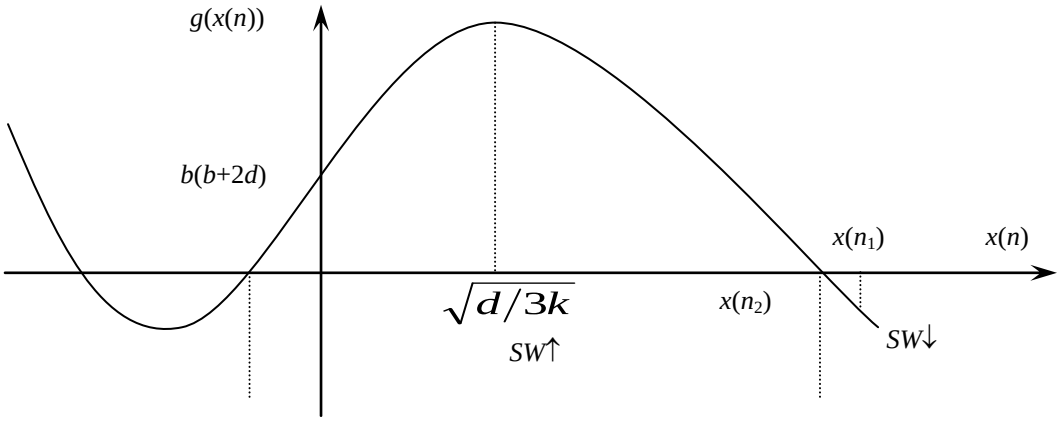


Рис.1. Зоны роста и убывания функции общественного благосостояния

Покажем, что $n_1 > n_2$ (то есть равновесное число фирм на рынке всегда больше общественно эффективного). Для этого, с учетом положительности икса и монотонности перехода от *n* к *x*, достаточно показать, что $g\left(x\left(n_1\right)\right) < 0$:

$$x\left(n_1\right) = \frac{b\left(a-c\right)\sqrt{b+d}}{b\sqrt{f}} - b\frac{\left(b+2d\right)}{b} + b + 2d = \frac{\left(a-c\right)\sqrt{b+d}}{\sqrt{f}},$$

$$g\left(x\left(n_1\right)\right) = d\frac{\left(a-c\right)\sqrt{b+d}}{\sqrt{f}} + b^2 + 2bd - \frac{f}{\left(a-c\right)^2}\frac{\left(a-c\right)^3\left(b+d\right)\sqrt{b+d}}{f\sqrt{f}} =$$

$$= b\left(b + 2d - \left(a-c\right)\frac{\sqrt{b+d}}{\sqrt{f}}\right)$$

Очевидно, что функция $g\left(x\left(n_1\right)\right)$ всегда отрицательна при выполнении условия (1) выгодности работы фирм на рынке.

Главным выводом проведенного исследования является то, что с точки зрения максимизации общественного благосостояния на рынке должно находиться меньшее, чем в равновесии, число более крупных, чем в равновесии, фирм. Причем он применим не только к линейным издержкам, для которых справедлива возрастающая отдача от масштаба, но и к квадратичным функциям общего вида, для которых с некоторого объема производство становится заведомо невыгодным даже при фиксированных ценах.

Таким образом, ограничения входа, инициируемые укоренившимися фирмами, не всегда уменьшают общественное благосостояние. Более того, в некоторых случаях целесообразно не стимулировать избыточную конкуренцию, а напротив, ограничивать вход на рынок новых компаний.

Однако нужно осознавать, что при малых постоянных издержках значительную опасность представляет увеличение вероятности сговора при ограничении числа фирм. В то же время при высокой доле постоянной составляющей в издержках их уменьшение является более важным, чем возможный сговор.

При ограничении входа через систему лицензирования важным является недопущение коррупции, весьма вероятной при распределении лицензий чиновниками, а не через аукцион. Также, поскольку при ограничении конкуренции происходит перераспределение богатства в обществе (потребительский избыток сокращается при одновременном увеличении прибыли фирм), важно обратить внимание на эффективные механизмы изъятия сверхприбыли у компаний, получивших более высокую степень монопольной власти.

Список литературы

1. *Филатов А.Ю.* Модели олигополии: современное состояние // Теория и методы согласования решений. – Новосибирск: Наука, 2009. – с.29–60.

Монополистическая конкуренция с неоднородным трудом. Модель торговли двух стран*

А.Ю. Филатов, Ю.М. Соколовский

Иркутский государственный университет, Россия

Большинство существующих в мире отраслевых рынков имеют структуру монополистической конкуренции. Классическая ее модель [1], предложенная в 1977 году Авинашем Дикситом и Джозефом Стиглицем, основывается на функции полезности с постоянной эластичностью замены и возрастающей отдаче от масштаба. Все фирмы производят собственную модификацию товара и продают ее (благодаря любви потребителей к разнообразию) по цене, превышающей предельные издержки. Число фирм и модификаций товара определяется из равенства прибыли нулю, что, в частности, зависит от уровня постоянных издержек. Уровень цен, объемов производства, зарплат также определяются эндогенно. Пол Кругман в работах [2], [3] применил указанные идеи к теории международной торговли и исследовал полученные эффекты, оказавшиеся адекватными тому, что наблюдается в реальности.

В то же время случай одинаковых фирм не соответствует реалиям экономики. Поэтому логичным развитием DSK-модели стала модель Марка Мелица [4], в которой предполагается, что предельные издержки производства различаются для разных фирм. Наименее эффективные фирмы в модели Мелица не выдерживают конкуренции и уходят с рынка, наиболее эффективные – могут получать положительную прибыль. Данное исследование также базируется на идее неоднородности фирм. При этом мы не будем разделять инвестиционные и постоянные издержки, как в модели Мелица, а ограничимся более простыми предположениями, позволяющими аналитически исследовать влияние эластичности замещения, размера рынка, степени неоднородности рабочих, долей секторов экономики на равновесные параметры: цены, объемы производства, зарплаты, общественное благосостояние.

Рассмотрим экономику, состоящую из сельскохозяйственного (традиционного) сектора, в котором однородный продукт A производится с постоянной отдачей от масштаба и промышленного (современного) сектора, производящего n разновидностей горизонтально дифференцированного продукта M с возрастающей отдачей от масштаба. Пусть в экономике существует L потребителей, чьи предпочтения идентичны и задаются на верхнем уровне функцией полезности Кобба-Дугласа

$$u = M^{\mu} A^{1-\mu} \to \max,$$

означающей, что долю $\mu \in (0;1)$ своего дохода они тратят на промышленный продукт, а долю $(1-\mu)$ – на сельскохозяйственный. Функция полезности нижнего уровня имеет постоянную эластичность замены $\sigma \in (1;+\infty)$.

$$M = \left(\int_0^n \left(q(i)\right)^{(\sigma-1)/\sigma} di \right)^{\sigma/(\sigma-1)}.$$

При $\sigma \to 1$ имеем функцию Кобба-Дугласа и на нижнем уровне. Разновидности дифференцированного продукта можно считать независимыми товарами, на каждый из которых вне зависимости от цены тратится фиксированная сумма. При $\sigma \to +\infty$ получаем линейную функцию полезности, описывающую совершенные заменители. Все деньги рационально действующий потребитель будет тратить на самую дешевую из представленных разновидностей.

Обозначив суммарный доход всех потребителей за I и учитывая идентичность их предпочтений, получим, что при заданных ценах $p(i)$ спрос $q(i)$ на i-разновидность дифференцированного продукта находится как решение следующей задачи:

$$\int_0^n \left(q(i)\right)^{(\sigma-1)/\sigma} di \to \max, \quad \int_0^n p(i) q(i) di = \mu I.$$

Выписав для нее функцию Лагранжа и продифференцировав ее по $q(i)$, получим важное соотношение, связывающее объемы продаж с ценами

$$\frac{q(i)}{q(j)} = \left(\frac{p(j)}{p(i)} \right)^{\sigma}.$$

Пусть единственным фактором производства будет неоднородный труд (и являющийся причиной гетерогенности фирм), потребности в котором составляют

$$l(i) = f + c(i) q(i).$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №12-06-00280-а.

Характеристика $c(i)$ означает число рабочих, необходимое для производства единицы продукции *i*-фирмы. Если рабочий *i*-фирмы получает за свою квалификацию зарплату $w(i)$, суммарные издержки этой фирмы составят

$$TC(i) = w(i)l(i).$$

Каждая из фирм максимизирует свою прибыль:

$$\pi(i) = p(i)q(i) - w(i)\big(f + c(i)q(i)\big) = q(i)\big(p(i) - w(i)c(i)\big) - w(i)f \to \max_{p(i)}.$$

Решив данную задачу, получим

$$p(i) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} w(i)c(i).$$

В долгосрочном равновесии прибыль всех фирм равна нулю:

$$q(i)\big(p(i) - w(i)c(i)\big) - w(i)f = 0, \quad q(i)w(i)c(i)\left(\frac{\sigma}{\sigma-1} - 1\right) = w(i)f, \quad q(i) = \frac{f(\sigma-1)}{c(i)}.$$

Из соотношения цен и объемов найдем связь зарплаты с производительностью труда:

$$\frac{w(i)}{w(j)} = \left(\frac{c(j)}{c(i)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}.$$

Несмотря на неоднородность, размер каждой фирмы будет одинаков:

$$l(i) = f + c(i)q(i) = f + f(\sigma - 1) = f\sigma.$$

В простейшем варианте модели [5] все население *L* делятся на квалифицированных промышленных рабочих (их доля составляет α_1, производительность $c_1 = c$), неквалифицированных промышленных рабочих (доля α_2, производительность $c_2 = \gamma c$) и крестьян (доля $1 - \alpha_1 - \alpha_2$).

В модификации [6] исследованы институциональные ограничения на рынке труда. Исследована модель с фиксированной зарплатой, введение которой может быть вызвано государственной политикой (например, единой тарифной сеткой), асимметрией информации, не позволяющей фирмам в момент заключения контракта разграничивать эффективных и неэффективных рабочих, или чем-то иным. Рассмотрены механизмы стимулирования эффективных рабочих, включая перераспределение прибыли. Осуществлено сравнение полученного равновесия с равновесием в базовой модели.

Модель несложно обобщается на случай произвольного числа классов производительности труда, включая непрерывное распределение квалификации рабочих. Пусть число рабочих, необходимых для производства единицы продукции на *i*-фирме зависит от показателя самого квалифицированного рабочего *c* и задается формулой

$$c(i) = \gamma(i)c, \ \gamma(i) \in [1; \bar{\gamma}].$$

Тогда уровень зарплаты зависит от зарплаты самого квалифицированного рабочего *w*:

$$w(i) = \big(\gamma(i)\big)^{-(\sigma-1)/\sigma} w.$$

В простейшем случае равномерного распределения качества рабочих на отрезке характеристика $\gamma(i)$, показывающая, во сколько раз производительность рабочих на данной фирме ниже, чем на самой эффективной, вычисляется в соответствии с выражением

$$\gamma(i) = 1 + \frac{i}{n}(\bar{\gamma} - 1),$$

цены, объемы производства, размер фирмы и их масса задаются формулами

$$p(i) = \frac{\sigma}{\sigma-1} w(i)c(i), \quad q(i) = \frac{f(\sigma-1)}{c(i)}, \quad l(i) = f\sigma, \quad n = \alpha L / f\sigma,$$

а суммарная зарплата промышленных рабочих выражается интегралом

$$W = \int_0^n l(i)w(i)di = \frac{\alpha L}{n} w \int_0^n \left(1 + \frac{i}{n}(\bar{\gamma} - 1)\right)^{-(\sigma-1)/\sigma} di = \alpha L w \sigma \frac{\bar{\gamma}^{1/\sigma} - 1}{\bar{\gamma} - 1}.$$

Из баланса предложения и спроса в сельском хозяйстве найдем равновесную зарплату:

$$(1-\alpha)L = (1-\mu)\left(\alpha L w \sigma \frac{\bar{\gamma}^{1/\sigma} - 1}{\gamma - 1} + (1-\alpha)L\right), \quad w = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{1-\alpha}{\alpha\sigma} \frac{\bar{\gamma} - 1}{\bar{\gamma}^{1/\sigma} - 1}.$$

Еще одним важным направлением исследований является изучение последствий открытия границ и

формирования торговых потоков между двумя странами. Рынки каждой из стран могут быть смоделированы указанным выше способом. Распределение квалификации рабочих (в простейшем случае равномерное) до и после объединения представлено на рис. 1.

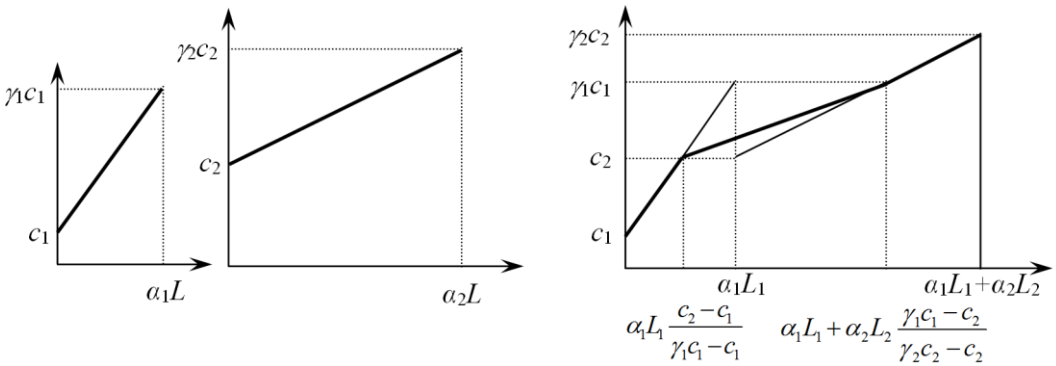


Рис.1. Распределение квалификации рабочих до и после объединения стран

В простейшем случае отсутствия транспортных издержек и таможенных пошлин модель показывает, что объединение стран и возникновение международной торговли всегда увеличивает разнообразие товаров и приводит к росту полезности их жителей, выравнивает цены, однако при этом не исключена деиндустриализация в стране с неэффективным промышленным сектором.

Предложенная модель также позволяет исследовать, как на получаемые равновесия и общественное благосостояние влияет введение таможенных пошлин различного вида и изменение транспортных издержек.

Список литературы

1. *Dixit A., Stiglitz J.* Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review. – 1977. – V.67. – P.297–308.

2. *Krugman P.* Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade // Journal of International Economics. – 1979. – V.9. – P.469–479.

3. *Krugman P.* Scale Economies, Product Differentiation, and The Pattern of Trade // American Economic Review. – 1980. – V.70. – P.950–959.

4. *Melitz M.* The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity // Econometrica. – 2003. – V.71. – P.1695–1725.

5. *Филатов А.Ю., Соколовский Ю.М.* Учет неоднородности труда при моделировании монополистической конкуренции. Базовая модель // Труды XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 2011, с.280–285.

6. *Филатов А.Ю., Соколовский Ю.М.* Учет неоднородности труда при моделировании монополистической конкуренции. Модель с фиксированным уровнем зарплаты // Труды XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 2011, с.286–292.

Математическая модель монопольного рынка нескольких товаров длительного пользования*

А.Ю. Флёрова, Т.А. Нагапетян

ВЦ РАН, МФТИ, Москва, Россия

В данной работе продолжено изучение гипотезы Коуза о том, что монополист на рынке товаров длительного пользования может испытывать конкуренцию со стороны товаров, проданных ранее [1].

Пусть монополист производит и продаёт n видов товаров длительного пользования. Обозначим $X(t) = (X_1(t),...,X_n(t))$ запас товаров у потребителя в момент времени t, где $X_i(t)$ - запас i-го товара. Будем считать, что товары закреплены за покупателем, т.е. нет возможности перепродавать товары на вторичном рынке. Тогда цена i-го товара в момент времени t будет определяться обратной функцией спроса $P_i(X(t)) = P_i(X_1(t),...,X_n(t))$, причем $\frac{\partial P_i(X)}{\partial X_j} < 0, \forall i, j = 1,2,...,n$ (мы рассматриваем

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 12-01-31405 мол_а, 11-01-12084-офи-м-2011, 11-07-00162-а); ПФИ ОМН РАН № 3, проект 3.14, ПФИ Президиум РАН № 15, проект 106.

конкурирующие товары). Предположим, что функция издержек линейна по выпуску, а издержки по выпуску единицы продукции обозначим через $c=(c_1,...,c_n)$. Будем считать, что выбытие товара описывается экспоненциальной функцией, коэффициент выбытия обозначим α, здесь

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & & 0 & \alpha_n\end{pmatrix}$$

– диагональная матрица с положительными элементами. Пусть r – банковская процентная ставка.

Задача монополиста состоит в максимизации прибыли $N(t)$ на отрезке времени $[0,T]$. Управляющим параметром в этой задаче является количество продаваемых (выпускаемых) товаров. Решение задачи максимизации прибыли монополиста будем искать в классе импульсных управлений вида $q=\{\mu(t),u_r\}$, где $\mu(t)$ – векторная мера со значениями в конусе R^2, а u_r – семейство присоединенных вектор-функций, принимающее значение в конусе R^2 [2]. Задача максимизации прибыли монополиста имеет следующий вид

$$N(T)\to\max$$

$$\dot N=\left\langle P(X)-c,\frac{dq}{dt}\right\rangle+rN,$$

$$\dot X=\frac{dq}{dt}-\alpha X=u-\alpha X,$$

$$q=\{\mu(t),u_r\},$$

$$\mu(t),u_r\in R^2,$$

$$N(0)=X(0)=0.$$

Требование выполнения условия корректности Фробениуса (условия устойчивости по расширению класса управлений) [3] приводит к следующему тождеству

$$\frac{\partial P_i(X)}{\partial X_j}-\frac{\partial P_j(X)}{\partial X_i}\equiv 0,\forall i,j=1,...,n.$$

Товары длительного пользования, для которых такая характеристика оказывается справедливой, можно назвать неразличимыми. В таком случае, монополисту безразлично, какой товар продавать раньше других: изменение количества товаров одинаково влияет на изменение цены других товаров. Будем рассматривать неразличимые товары. Выполнение условия Фробениуса дает нам возможность использовать принцип максимума для задач с импульсным управлением [3].

Запишем на данной задачи функцию Гамильтона-Понрягина и сопряженную систему в следующем виде

$$H=\langle (P(X)-c),u\rangle+rN+\langle\psi,u-\alpha X\rangle.$$

$$\dot\psi_i=\left(\frac{\partial P_1}{\partial X_i}u_1+...+\frac{\partial P_n}{\partial X_i}u_n\right)+(r+\alpha_i)\psi_i,\quad i=1,...,n.$$

При этом мы учли условие трансверсальности и сделали замену сопряженных переменных, домножив их на $e^{r(t-T)}$.

Из принципа максимума следует, что на оптимальной траектории

$$\forall j\quad H_{u_j}\begin{cases}\le 0\ \forall t\in[0,T],\\ =0\ при\ t\in S_j,\end{cases}$$

где $S_j\subset[0,T]$ – множество моментов времени, на котором сосредоточена (т.е. отлична от нуля) компонента u_j оптимального импульсного управления. В применении к исследуемой задаче это условие дает следующую систему для нахождения оптимальной траектории

$$(\alpha_1+r)(P_1(X)-c_1)+\alpha_1X_1\frac{\partial P_1(X)}{\partial X_1}+\alpha_2X_2\frac{\partial P_2(X)}{\partial X_1}+...+\alpha_nX_n\frac{\partial P_n(X)}{\partial X_1}=0,$$

$$(\alpha_2+r)(P_2(X)-c_2)+\alpha_1X_1\frac{\partial P_1(X)}{\partial X_2}+\alpha_2X_2\frac{\partial P_2(X)}{\partial X_2}+...+\alpha_nX_n\frac{\partial P_n(X)}{\partial X_2}=0,$$

$$\left(\alpha_n + r\right)\left(P_n(X) - c_n\right) + \alpha_1 X_1 \frac{\partial P_1(X)}{\partial X_n} + \alpha_2 X_2 \frac{\partial P_2(X)}{\partial X_n} + \ldots + \alpha_n X_n \frac{\partial P_n(X)}{\partial X_n} = 0.$$

Обозначим эту систему $f(X) = 0$. Решение этой системы существует и единственно, когда все главные миноры якобиевой матрицы $f(X)$ отрицательны [4]. Полученная оптимальная траектория – решение системы, обозначим его X^* – является магистралью в сильнейшей форме, движение по которой происходит при оптимальном управлении $u^* = \alpha X^*$.

Оптимальная траектория попадает на магистраль скачком в начальный момент времени, в этот момент монополист выходит на рынок и мгновенно продаёт такое количество товаров, которое заполняет рынок до магистрального значения. Далее, при нахождении на магистрали X^*, продаётся такое количество товаров, которое лишь позволяет восполнить потери от амортизации. В последний момент времени торговец пытается продать как можно большее количество товаров и цены падают до себестоимости, т.е. до конкурентных цен.

Список литературы

1. *Флёрова А.Ю.* Управление производством товаров длительного пользования с учётом монополистического лизинга // Известия РАН: Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 167–176.

2. *Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю.* Необходимые условия в задаче оптимального импульсного управления. Нелинейная динамика и управление. Вып.4. Сб. статей под редакцией С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2004. С. 205–240.

3. *Дыхта В. А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

4. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

Предсказательное моделирование транспортных потоков

1. *N. Ivkin* Voronoi diagram for oriented generators in Origin-Destination matrix estimation 193
2. *В.В. Балашов, А.В. Смирнов, Т.О. Цейтлина* Предсказательное моделирование развития сети магистральных авиалиний России 196
3. *Ю.Н. Богданова, Е.А. Макарова, Д.А. Фрумкин* Задачи сетевой компьютерной лаборатории транспортного моделирования 197
4. *А. Богданова, Н.Н. Смирнов, А.Б. Киселев, В.Ф. Никитин, А.С. Маненкова* Прогнозирование движения транспортных потоков 198
5. *А.М. Валуев* Информационный механизм установления динамического равновесия регулярных корреспонденций в дорожной сети 200
6. *М.С. Васильев* Преобразование схем дорожных сетей 202
7. *К.К. Глухарев, А.М. Валуев* Моделирование автотранспортных потоков в формализме гибридных систем (событийно-переключаемых процессов) 203
8. *Е.Г. Дорогуш* Пропускная способность и уровень загруженности транспортной сети на примере математической модели автомагистрали 206
9. *Е.И. Ершов* Микросистемный способ отбора единственного равновесия в модели Бэкмана 206
10. *В.В. Захаров, А.Ю. Крылатов* Разработка оптимальной транспортной инфраструктуры города на базе игровой модели «администрация – поставщики услуг навигации» 209
11. *А.А. Лыков, В.А. Малышев, В. Мильчевская* Об оценках критического числа машие в городе 209
12. *Т.С. Обидина* Применение методов микроскопического моделирования для решения задач о запрете перестроения и перекрёстке 210
13. *Н.С. Чепанов* Об одном способе решения задачи энтропийно-линейного программирования для расчета матрицы корреспонденций 212

Voronoi diagram for oriented generators in Origin-Destination matrix estimation

N. Ivkin

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation

Abstract

When estimating origin-destination matrix from cellular networks data, the problem of localization person by utilized cellular base station arise. Commonly cellular base stations are considered as broadcasting equally in all directions, thus solution can be obtained with help of classic Voronoi diagram. But we will consider each base station broadcasting into own angular sector. We will provide the solution that was realized for cellular network in Moscow.

Introduction

Understanding of actual human mobility patterns has many social and economic applications, one of them is urban planning. Knowing these patterns it becomes possible to eliminate many problems in complex transport infrastructure, such as traffic congestion, overloaded public transport and other. For many years different data sources were used for evaluating these patterns: traffic counters, data from cellular network operators, municipal social data archives, pollings, video monitoring and tickets data from public transport. In our research the data from cellular network operator was used. It has many advantages:

- It doesn't require any additional equipment for collecting, all necessary infrastructure already exists
- All clients of one major cellular network operator usually statistically represent all residents of considered area
- It's actual and could be updated regularly and for the low price
- It's precise enough for making decisions in urban planning

Problem statement

Our data from cell phone operator was associated with billing operations: calls, internet, messages and etc. The simplified structure of the data can be represented as a table with quarter of billion notes. There are three columns in a table: client id, cellular base station id, time stamp. Each station is described by its position and angular sector of broadcasting. Example depicted on Fig.1 presents six stations located in two positions by groups of three, lighted areas show the broadcasting directions. Our data from cell phone operator was associated with billing operations: calls, internet, messages and etc. The simplified structure of the data can be represented as a table with quarter of billion notes. There are three columns in a table: client id, cellular base station id, time stamp. Each station is described by its position and angular sector of broadcasting. Example depicted on Fig.1 presents six stations located in two positions by groups of three, lighted areas show the broadcasting directions.

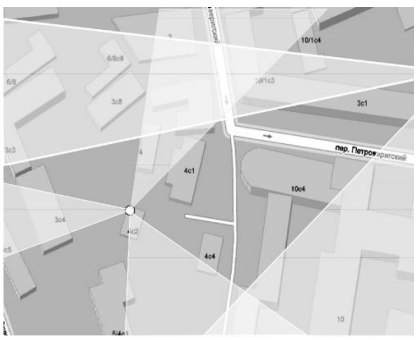


Fig.1 Broadcasting pattern example.

Formal definition of desired partition:

Let X be a space endowed with Euclidean distance d. Let all generators be described as pairs $\{(G_i, C_i)\}$, where $G_i \in X$ is a position of generator and $C_i \subset X$ is a subset where this generator is active. We need to find tuple of subsets $\{P_i\}$, where $\mathrm{P_i} \in \mathrm{C_i}$ and for every point $K \in P_i$ and for every generator (G_i, C_i): $K \in C_j \Rightarrow \mathrm{d(K, G_i)} \leq d(K, G_j)$. In our application generator is a cellular base station and subset where it's active always alike circular sector (Fig.1). We need to solve problem only for subset Y of two-dimensional X that contain all generators (convex hull of generators in this case).

Proposed algorithm

Our solution is based on the problem reduction to the classical Voronoi diagram. General algorithm consists of four stages: initial triangulating, coverage partition, classical Voronoi diagram and uniting.

Stage 1. Initial triangulating. Firstly, we need to find set of convex polygons $\{P_k^1\}_{k \in K_1}$:

- $\bigcup_{\mathrm{k} \in \mathrm{K}_1} \mathrm{P}_\mathrm{k}^1 = \mathrm{Y}$,
- $\forall k \neq t: P_k^1 \cap P_t^1 = \emptyset$,
- $\forall\ k \in K_1, t \in T: G_t \in P_k^1 \Rightarrow\ G_t \in \partial P_k^1$,

where K_1 is set of polygons indices and T is set of generators indices. The most evident solution for this problem is Delaunay triangulation of generators set.

Stage 2. Coverage partition. At this stage we want to create from partition $\{\mathrm{P}_\mathrm{k}^1\}_{\mathrm{k} \in \mathrm{K}_1}$ obtained on the previous stage, new partition $\{P_k^2\}_{k \in K_2}$:

- $\bigcup_{k \in K_2} P_k^2 = Y$,
- $\forall k, t \in K_2: P_k^2 \cap P_t^2 = \emptyset$
- $\forall k \in K_2,\ t \in T: G_t \in P_k^2 \Rightarrow G_t \in \partial P_k^2$
- $\forall k \in K_2, t \in T: C_t \cap P_k^2 \neq \emptyset \Rightarrow C_t \cap P_k^2 = P_k^2$,

where K_2 is set of polygons indices and C_t – subset of X where generator G_t is active.

Firstly, we need to assign two lists of cellular base stations for each polygon, obtained on the previous stage:

1. ***stations-to-consider***: list of cellular stations that should be considered, when processing this polygon,

2. ***coverage***: list of cellular stations that already considered and fully cover this polygon (generators associated with this stations is active for all points inside this polygon)

These two lists will be updated iteratively while more stations will be processed. Evidently that before processing all ***coverage*** lists are empty and all ***stations*-to-consider** lists comprise all cellular base stations. So we've got main ***list-of-polygons*** and for each polygon in this list we have defined two lists ***stations-to-consider*** and ***coverage***. Then the iteration scheme for this problem is provided below:

1. get polygon from ***list-of-polygons*** with non-empty list ***stations-to-consider***
2. sort ***stations-to-consider*** list by distance from nearest node of polygon
3. delete from ***stations-to-consider*** stations that surely are not active for any point inside polygon. Considering polygons and station we should compute for each an angle under which it's seen from base station. Operating with this angles and stations broadcasting angles we can easily implement several rules that will define if this station covers at least one point of this polygon.
4. consider and delete first station from ***stations-to-consider***:

a. if this station is active for all points inside polygon then we add this station to ***coverage*** list and keep this polygon in ***list-of-polygons***

b. if this station is active for some points inside polygon then we should find subpolygon which is fully covered by this stations and subpolygon or subpolygons where this station isn't active. All found subpolygons inherit lists ***stations-to-consider*** and ***coverage*** from the polygon, moreover, the covered subpolygon adds this

station to ***coverage*** list. All subpolygons must be added to the ***list-of-polygons*** while polygon must be deleted from this list.

c. if this station isn't active for any points inside polygon then we just keep this polygon in **list-of-polygons.**

When all polygons have got their list **stations-to-consider** being empty, then algorithm stops.

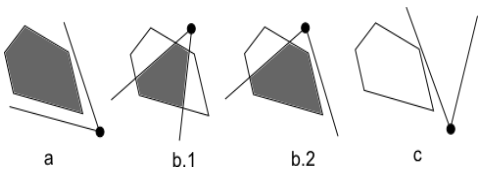


Fig.2 Different possibilities of coverage

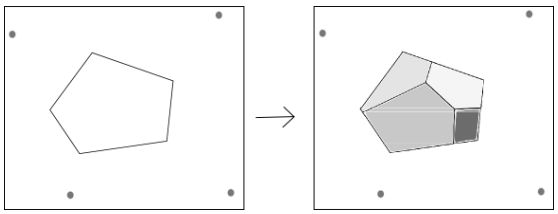


Fig.3 Voronoi diagram for polygon

As a result we have obtained list that represents partition $\{P_k^2\}_{k \in K_2}$.

Stage 3. Classical Voronoi diagram. For each polygon P_k^2 obtained on the previous stage we can find all generators G_t: $C_t \cap P_k^2 = P_k^2$ that are active for every point inside this polygon. Thus inside each P_k^2 we can build Voronoi diagram considering only active generators. Typically there aren't more than 10 active generators per polygon, therefore any algorithm can be taken for these purposes (practically performance bottle neck appears in the previous stage). After processing polygon from previous stage Voronoi sights should be assigned to corresponding generators (the typical result is depicted on Fig. 3). Thus after processing all polygons, some non-empty set of polygons will be assigned to each generator.

Stage 4. Uniting. As it was said above, each generator has polygons set assigned to it. On this stage we should unite sights within each generator, where it's possible. It's possible to obtain non-convex polygon as a result or several polygons, as depicted on Fig.4.

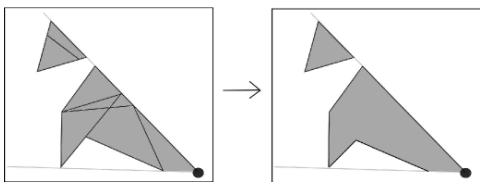


Fig.2 Several polygons correspond to one generator

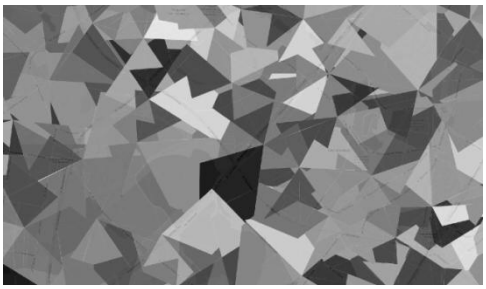


Fig.6 Moscow suburb partition

Results

Described above algorithm was implemented for cellular network of Moscow and Moscow region. There was about 12000 unique base stations located in about 4500 unique locations. Distance between stations variates from hundreds of meters in city center to several kilometers in the suburbs of region. All calculations were performed in less than an hour on the personal computer. The result for one Moscow suburb depicted on Fig. 5.

Conclusion

As it was said above we have considered the problem of localization person by cellular base station for the case when each cellular base station has its own diagram of broadcasting directions. This approach has provided us with more precise solution rather than classical approach, where each cellular station considered as broadcasting continuously in all directions. But our assumption about signal propagation was simplified a lot, and considering more complex model we can achieve even more precise localization.

References

1. *R. Becker, R. Caceres, K. Hanson, S. Isaacman, J. Loh, M. Martonosi, J. Rowland, S. Urbanek, A. Varshavskyy, C. Volinskyy*, Human Mobility Characterization from Cellular Network Data // Communications of the ACM, Vol. 56 No. 1, Pages 74-82. 2013

2. *D. Schulz, S. Bothe, C. Korner* Human Mobility from GSM Data – A Valid Alternative to GPS?, Nokia Mobile Data Challenge 2012 Workshop, June 18-19, 2012, Newcastle, UK, http://research.nokia.com/files/public/mdc-final458-schulz.pdf

3. *Fosca Giannotti and Dino Pedreschi (Eds.)* Mobility, Data Mining and Privacy., Springer, 2008.

4. *S. Bera, K. Rao* Estimation of origin-destination matrix from traffic counts: the state of the art , European Transport Trasporti Europei n.49 (2011): 3-23

5. *A. Gasnikov, S. Klenov,E. Nurminsky,Y. Holodov, N. Shamray* Introduction into traffic flows mathematical modeling. MCNMO, 2012 http://zoneos.com/traffic/

Предсказательное моделирование развития сети магистральных авиалиний России

В.В. Балашов, А.В. Смирнов, Т.О. Цейтлина

ФГУП «ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского», Жуковский, Россия

Предсказательное моделирование развития сети авиалиний является необходимым элементом при формировании сценариев развития авиатранспортной системы России. Без сценариев невозможно сформировать стратегию развития авиационной отрасли или бизнес-план нового воздушного судна. Модель, предназначенная для прогнозирования развития сети, должна отражать не только количественные изменения области, но и качественные особенности, происходящие в ней. Последнее невозможно без понимания природы развития сети авиалиний.

В работе показано, что развитие сети магистральных авиалиний России происходит в соответствии с определёнными закономерностями. На основании этой гипотезы разработана методика предсказательного моделирования развития сети авиалиний. Прогнозирование развития структуры сети внутрироссийских магистральных авиалиний осуществляется с помощью разработанной информационной нечёткой нейросетевой модели [1] на основании социально-экономических и демографических прогнозов развития страны. При анализе адекватности разработанной модели и прогнозной сети, полученной с её помощью, необходимо, чтобы разработанная информационная модель демонстрировала не только хорошие количественные характеристики при моделировании существующих и отсутствующих авиалиний, но и обеспечивала стабильность структуры сети.

Сеть внутрироссийских магистральных авиалиний имеет сложную топологию. В работах [2-4], посвященных изучению свойств сложных сетей, даются формулировки трёх основных концепций, дающих представление о сложных сетях и их отличии от случайных сетей – малые миры, кластеризация и распределение степеней; вводится понятие безмасштабные (масштабно-инвариантные) сети (scale-free network). Развитие аппарата безмасштабных сетей связано с изучением социальных сетей. Однако к безмасштабным сетям относят также транспортные и коммуникационные сети, для которых стоимость добавления новых связей несоизмеримо меньше, чем стоимость образования узла [4]. Это позволяет предположить, что сеть внутрироссийских магистральных авиалиний также может рассматриваться как безмасштабная сеть. Для проверки данного предположения для сети внутрироссийских магистральных авиалиний были проведены расчёты. Согласно им распределение количества городов/аэропортов по количеству авиасвязей (k) хорошо описывается степенным законом: вероятность того, что некоторый город/аэропорт связан прямым авиасообщением с k другими городами/аэропортами сети, пропорциональна величине k^{-n}. Чем больше количество авиасвязей k у города/аэропорта, тем меньше городов/аэропортов с таким количеством авиасвязей в сети. При этом, как и в большинстве безмасштабных сетей, показатель степени n оказывается между 2 и 3. Анализ степени связности сети внутрироссийских магистральных авиалиний показал, что сеть содержит ядро сильносвязных концентраторов. Это семь городов (Москва, Санкт-Петербург, Екатеринбург, Новосибирск, Красноярск, Краснодар и Сочи) с наибольшим количеством авиалиний, попарно соединенные друг с другом. Они образуют концентратороподобное ядро сети со связностью 100%. Анализ структуры сети внутрироссийских магистральных авиалиний показал, что её диаметр не превышает четырёх, т.е. не более чем с тремя пересадками/остановками можно из любого города/аэропорта магистральной сети авиалиний России прибыть в любой другой город/аэропорт этой сети. Развитие сети внутрироссийских магистральных авиалиний происходит в соответствии с механизмами предпочтительного присоединения и ассортативности при образовании новых связей, характерными для безмасштабных сетей.

Разработана нечёткая нейросетевая модель «условий существования» авиалиний (УСА), относящаяся к классу информационных моделей. Предполагается, что главным фактором, определяющим существование авиалинии, является «цель поездки». В состав переменных, на базе которых сформированы УСА, входят: «генерационные» – численность населения и валовый региональный продукт субъекта Федерации, отнесённые к городу/аэропорту вылета; «целевые» – статус города прилёта и число мест коллективного размещения (в гостиницах, санаториях и др.) для города прилёта; характеристики транспортной связи – наличие ж/д станций в городах вылета и прилёта и «класс авиалинии» (определяется характеристиками аэропортов в городах вылета и прилёта). Нейронная сеть сформирована на основе статистических данных 2006 года.

С использованием модели УСА осуществлено прогнозирование развития сети внутрироссийских магистральных авиалиний на период до 2020 г. Рассмотрены три сценария социально-экономического

развития страны [5] – инерционный, энерго-сырьевой и инновационный. Каждому сценарию соответствуют определённые предполагаемые изменения значений входных переменных модели УСА к 2020 г. [6]. В прогнозных сетях выделено три категории авиалиний (прямого авиасообщения между двумя городами/аэропортами): «авиалиния существует», «авиалиния не существует» и «авиалиния моделируется неоднозначно». Показано, что наибольшее прогнозируемое число «существующих» авиалиний (784) соответствует «инновационному» сценарию, что вдвое превышает количество «существующих» авиалиний в «базовом» 2006 году. Максимальное прогнозируемое число «несуществующих» авиалиний (4533) соответствует «инерционному» сценарию. Число «неоднозначно моделируемых» авиалиний для всех трёх рассмотренных сценариев социально-экономического развития страны является приблизительно одинаковым и составляет около 30% от общего числа рассматриваемых пар городов (7209).

Анализ структуры прогнозной сети показывает, что разработанная модель адекватно отражает безмасштабную природу сети – прогнозируемые новые связи удовлетворяют механизмам предпочтительного присоединения и ассортативности. Несмотря на значительное увеличение числа авиалиний, структура сети в целом не претерпит существенных изменений.

Список литературы

1. *Балашов В.В., Смирнов А.В., Цейтлина Т.О.* Моделирование сети магистральных авиалиний // «Мир транспорта», № 3, 2012. С. 14–23.
2. *Barabasi A.-L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V. 286. No. 5439. P. 509–512.
3. *Albert R., Barabasi A.-L.* Statistical mechanics of complex networks // Reviews of Modern Physics. 2002. V. 74, No. 1. P. 47–97
4. *Барабаши А.-Л., Бонабо Э.* Безмасштабные сети // «В мире науки», №8, 2003. С. 54–63.
5. Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года (утв. распоряжением Правительства РФ № 1662-р. от 17 ноября 2008 г.)
6. Сценарные условия долгосрочного прогноза социально-экономического развития Российской Федерации до 2030 года // Минэкономразвития России. Опубликовано на официальном сайте Минэкономразвития России
http://www.economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz/doc20120428_0010

Задачи сетевой компьютерной лаборатории транспортного моделирования

Ю.Н. Богданова, Е.А. Макарова, Д.А. Фрумкин

МАИ, Москва, Россия

Количество автомобилей в городах растет с каждым годом быстрыми темпами. Из-за этого в крупных городах все большее значение приобретают оптимальное планирование транспортных сетей и улучшение организации работы уже имеющихся. Для решения этих и ряда других актуальных задач было разработано большое количество математических моделей, которые при обобщении можно разделить на 3 типа: прогнозные, имитационные, оптимизационные. Наибольший интерес представляют имитационные динамические модели, имеющие большое практическое применение, в частности для разработки систем автоматизированного оперативного управления транспортными потоками.

Имитационные модели в свою очередь разделяются на: микроскопические, мезоскопические, макроскопические. На данный момент существуют программные комплексы, которые реализуют некоторые математические модели, например, Aimsun, VISSIM, SUMO, cos.sim и т.д. Программное обеспечение, успешно решающее большинство задач транспортного моделирования, может быть разработано с использованием нескольких близких друг к другу или даже принципиально различных математических моделей. Найдя их оптимальную комбинацию, удастся избежать многих «подводных камней» каждой отдельно взятой модели.

В настоящее время ведется разработка проекта, в состав которого входит подобное программное обеспечение. Основной целью проекта, будет создание благоприятных условий для подготовки молодых ученых и исследователей, развитие творческого сотрудничества специалистов. На эти цели, прежде всего, и была направлена работа по созданию сетевой компьютерной лаборатории. Одним из важнейших условий, влияющих на положительные перспективы работы с лабораторией, является удобство работы. Удобно должно быть и простому пользователю, заинтересовавшемуся опубликованным материалом, и автору, который, конечно же, с головой погружен в свою работу. Удобство заключается в простоте и интуитивной понятности интерфейса, который позволяет не отвлекаться, к примеру, на изучение

сложных средств для поиска информации или возможности размещения своих материалов на странице сайта.

Малейшие технические трудности при размещении авторских материалов могут отпугнуть их создателя от сотрудничества с администрацией сайта. Поэтому инструментарий для подготовки интернет - публикаций должен быть прост, понятен автору, должен представлять и текст статьи, и иллюстрации именно в том виде, в каком они были задуманы изначально.

Данный проект будет состоять из нескольких составляющих: из непосредственной программы, реализующей различные подходы к моделированию транспортных потоков, обучающие материалы на эту тему, образовательного портала и т.д. Сайт, который разрабатывается с учетом возможной расширяемости, будет доступным как для специалистов в сфере транспорта, так и для новичков, которые заинтересовались данной темой.

Особенностью программы, входящей в проект, будет распараллеливание вычислений на кластере. Это направление дает огромный потенциал в вычислительной мощности, а так же значительный выигрыш во времени. Анализ результатов параллельных вычислений показал высокую эффективность как разработанных подходов к построению алгоритмов, так и перспективность использования кластерной вычислительной техники в прикладных исследовательских задачах.

Прогнозирование движения транспортных потоков.

А. Богданова, Н.Н. Смирнов, А.Б. Киселев, В.Ф. Никитин, А.С. Маненкова

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

Данная работа содержит результаты исследования неравновесного состояния движения транспорта на кольцевых дорогах. Исследуемая модель не ограничивается уравнением неразрывности и эмпирическими соотношениями между плотностью и расходом[1-3,5], она также содержит уравнение моментов. В этой модели предлагается использовать зависимость от параметров, описывающих технические возможности транспортного средства (автомобиля)[11-19].

Рассматривается однонаправленный поток машин. Пересечение с другими дорогами и наличие светофоров может учитываться с помощью соответствующих граничных условий. Вводится Эйлерова система координат Ox вдоль автомагистрали в направлении движения потока и время t. Среднюю плотность потока $\rho(x,t)$ определим как отношение площади полосы движения, занятой транспортными средствами, к площади всего рассматриваемого участка полосы движения: $\rho = \frac{S_{тр}}{S} = \frac{hn\ell}{hL} = \frac{n\ell}{L}$, где h – ширина полосы движения, L – длина контрольного участка дороги, ℓ – средняя длина транспортного средства с минимальным расстоянием между стоящими автомобилями, n – количество транспортных средств на контрольном участке. Так введенная плотность является безразмерной величиной и изменяется в интервале $0 \le \rho \le 1$. Введем скорость потока $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x,t)$, которая может изменяться в пределах, $0 \le v \le \mathrm{v}^0_{\max}$, где $\mathrm{v}^0_{\max}$ – максимально разрешенная скорость движения на магистрали вне систем регулирования дорожного движения. Из определений следует, что максимальная плотность $\rho = 1$ соответствует ситуации, когда машины располагаются практически вплотную («бампер в бампер»). В этом случае естественно принять $\mathrm{v} = 0$, т.е. на дороге образовалась «неподвижная пробка». Для непрерывного потока машин будет иметь место уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

Запишем уравнение динамики транспортного потока, точнее, уравнение изменения режима движения. Режим движения транспортных средств на дороге определяется следующими основными факторами: реакцией водителя на изменение дорожной обстановки и предпринимаемыми им активными действиями, откликом транспортного средства на действия водителя и техническими характеристиками транспортных средств. Тогда уравнение изменения скорости запишем в следующем виде:

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = a; \quad a = \max\left\{-a^-; \min\left\{\mathrm{a}^+; \mathrm{a}'\right\}\right\}$$
$$a' = \sigma_0 a_\rho + (1-\sigma_0)\int_0^Y \omega(y) a_\rho(t, x+y)\,dy + \frac{V(\rho) - \mathrm{v}}{\tau}, \quad a_\rho = -\frac{k^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\bigg|_+. \qquad (2)$$

Здесь a – ускорение транспортного потока; a^+ – максимально возможное ускорение разгона; a^- – ускорение экстренного торможения; величины a^+ и a^- положительны и определяются техническими характеристиками транспортного средства. Параметр $k > 0$ является, как было показано в работах [16-18], скоростью распространения возмущений («скоростью звука») в транспортном потоке.

Параметр τ имеет смысл времени задержки, обусловленной конечностью скорости реакции водителя на изменение дорожной обстановки и техническими характеристиками транспортного средства. Этот параметр отвечает за стремление водителя привести скорость автомобиля в соответствие с максимально безопасной скоростью движения $V(\rho)$ [16-18] : $V(\rho) = \begin{cases} -k\ln\rho, & \mathrm{v} < \mathrm{v}^0_{\max}, \\ \mathrm{v}^0_{\max}, & \mathrm{v} \geq \mathrm{v}^0_{\max} \end{cases}$. Скорость $V(\rho)$ определяется из-за независимости скорости и плотности потока в случае «плоской волны», когда движение начинается при $\rho_0 = 1$ и $\mathrm{v} = 0$, при ограничении максимального значения скорости $\left(\mathrm{v} \leq \mathrm{v}^0_{\max}\right)$. Параметр τ должен принимать разные значения в соответствии с максимально безопасной скоростью движения $V(\rho)$ для плотности потока ρ.

Для определения a_ρ во [2] мы используем производную справа (для потоков слева направо). Если функция $\rho(x)$ - гладкая и непрерывная, то это условие неважно. В противном случае нам необходимо добавить определение производной на бесконечности $\rho_+ > \rho_-$, $\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right|_- = 0$.

Определяющие параметры в (2) будут следующими. $Y = \min\{Y_0, L - x\}$ - характеристика видимости, зависящая от погодных условий, $\omega(y)$ это «вес»(в терминах математики) потока машин впереди транспортного средства, который влияет на решение водителя об изменении скорости и который мог бы быть определен, например, так:

$$\omega(y) = \frac{\omega_0(y)}{\int\limits_0^Y \omega_0(y)\,dy}, \quad \omega_0 = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq Y_0 \\ 0, & y < 0,\ y > Y_0 \end{cases},$$

σ_0 - безразмерный параметр $\left(0 \leq \sigma_0 \leq 1\right)$, характеризующий «вес» локальной дорожной ситуации по сравнению с ситуацией на некотором расстоянии впереди автомобиля.

В определении ускорения транспортного потока (правая часть уравнения (2)), первое слагаемое отвечает за влияние на поведение водителя локальной ситуации, второе за влияние ситуации вперед по потоку на расстоянии меньшем или равном Y, а третье за стремление водителя привести свою скорость в соответствие с максимально безопасной скоростью $V(\rho)$.

Таким образом, для описания динамики автотранспортного потока по однополосной дороге из (1) и (2) получается система двух квазилинейных уравнений в частных производных в дивергентной форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\mathrm{v})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho\mathrm{v})}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho\mathrm{v}^2\right)}{\partial x} = \rho a,$$

где ускорение a определяется тремя последними формулами (2).

В модели рассматриваются два популярных средства для регулировки движения автотранспорта по городским дорогам – светофоры и «лежачие полицейские».

Результаты исследований показывают, что в случае небольшой плотности (притока) потока машин «лежачие полицейские» позволяют сохранять благоприятную дорожную ситуацию не мешая, при этом, свободному движению машин. Регулировка движения с помощью светофоров позволяет улучшить пропускную способность дороги с помощью изменения продолжительности цикла светофора.

Рассмотренная модель позволяет качественно и количественно описать условия для создания максимальной пропускной способности дороги, описать места возможного начала и распространения заторов, а также влияние различных средств для регулировки движения на дорожную ситуацию.

Список литературы

1. *Lighthill M.J., Whitham J.B.* On kinetic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. of the Royal Society. Ser. A. No. 1178. Vol. 229. London, 1955. 317-345.
2. *Richards P.L.* Shock waves on the highway. Operations Research. 1956. Vol. 4. 42-51.
3. *Greenberg H.* An analysis of traffic flow. Operations Research. 1959. Vol. 7. 79-85.
4. *Prigogine I., Résibois P.* On a generalized Boltzman-like approach for traffic flow. Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg., 1962, vol. 48, No. 9, 805-814.

5. *Whitham J.* Linear and non-linear waves. Moscow, John Wiley & Sons, New York – London, 1974.

6. *Soldatov G.P.* On formation of a strong shock wave in a two-directional traffic flow. Applied Math. & Mech., 1970, vol. 34, No. 1, 135-137.

7. *Bando M., K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata, Y.Sugiyama*. Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation // Physical Review. 1995. Ser. E. Vol. 51. P. 1035.

8. *Hill S.A.* Numerical analysis of a time-headway bus route model // Physica A. 2003. Vol. 328, No. 1-2. P.261-273.

9. *Karim Md.M., Ohno T.* Air quality planning and empirical model to evaluate SPM concentrations // Journal of Environmental Engineering. 2000. Vol. 64. P. 1116-1124.

10. *Sukhinova A.B., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G.* Two dimensional macroscopic model for traffic flows. Mathematical modeling. 2009 vol. 21, #2, pp.118-126.

11. *Nagatani T.* Bunching transition in a time-headway model of a bus route // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 296, № 1-2. P.320-330.

12. *Regirer, S.A., Smirnov N.N., Chenchik, A.E.* Mathematical model of moving collectives interaction: Public transport and passengers. Automation and Remote Control. 2007, vol. 68, No 7, pp. 1225-1238.

13. *Kiselev A.B., Kokoreva A.V., Nikitin V.F., Smirnov N.N.* Computational modelling of traffic flows // European Conf. on Computational Fluid Dynamics (Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 Sept. 2006). Book of Abstracts. – Delft: TU Delft, 2006, p. 265.

14. *Kiselev A.B., Kokoreva A.V., Nikitin V.F., Smirnov N.N* Computational modelling of traffic flows // European Conf. on Computational Fluid Dynamics (Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 Sept. 2006). Proc. on CD-Rom. – 10 p.

15. *Smirnov N.N., Kiselev A.B., Nikitin V.F., Yumashev M.V.* Mathematical modeling of traffic flows. Moscow University Mechanics Bulletin, 2000, № 4, pp. 39–44.

16. *Kiselev A.B., Kokoreva A.V., Nikitin V.F., Smirnov N.N.* Mathematical modeling of traffic flow on traffic-controlled roads. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Engl. Transl.) 2004, Vol.68, No 5, pp. 1035–1042.

17. *Smirnov N.N. Kiselev A.B., Nikitin V.F., Yumashev M.V.* Mathematical modelling of traffic flows. Proc. 9th IFAC Symposium Control in Transportation Systems 2000, Braunschweig, 2000.

18. *Kiselev A.B., Nikitin V.F., Smirnov N.N. Yumashev M.V.* Irregular traffic flow on a ring road. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Engl. Transl.) 2000, Vol.64, No 4, pp. 627-634.

19. *Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Кокорева А.В.* Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Двухполосный транспортный поток: модель Т-образного перекрестка, исследование влияния перестроений транспортных средств на пропускную способность участка магистрали. Труды МФТИ, 2010, том.2, №4, 141-151. (*Smirnov N.N. Kiselev A.B., Nikitin V.F., Kokoreva A.V.,* Mathematical modeling of traffic flows using continua approach. Two lanes roads: modeling of T-shape crossing and the effect of lane changing on handling capacity. Proceedings of MIPT, 2010, vol.2, N.4, pp.141-151.)

Информационный механизм установления динамического равновесия регулярных корреспонденций в дорожной сети

А.М. Валуев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный МО, Россия

Проблема равновесия транспортных потоков в дорожных сетях и методы ее решения имеют долгую историю и успешные реализации [1, 2]. Однако сама постановка проблемы в статике имеет очевидные изъяны, т.к. загруженность практически любых транспортных сетей нестационарна, а поэтому цена любого маршрута, как ее ни определять, будет зависеть от времени старта. Например, в железнодорожном сообщении наряду с круглосуточным обращением товарных и дальних пассажирских поездов имеется пригородное сообщение, интенсивность которого, закономерно изменяясь в течение суток, практически равна нулю в ночное время. Особенно ощутима неравномерная по времени загруженность в городских дорожных сетях (ГДС).

Равновесное распределение корреспонденций по маршрутам и в статическом случае приводит к расщеплению некоторых корреспонденций между равновыгодными маршрутами. Для динамического равновесия, очевидно, не только пропорции в распределении отдельной корреспонденции между маршрутами, но и сам набор осуществляемых маршрутов будут зависеть от времени. Будем полагать, что ценой маршрута является время его прохождения. В проблеме динамического равновесия имеется

некоторая идеализация, т.е., в частности, не может быть учтена дискретная природа транспортного потока и цикличность светофорного регулирования. В динамической постановке могут быть, однако, учтены не только динамика самих корреспонденций, но и изменения в сети в соответствии с расписанием, например, длительное перекрытие железнодорожных переездов, разведение мостов, переключение направления полос и ввод реверсивного режима.

Равновесное расщепление корреспонденций по маршрутам в сети со стационарной нагрузкой возможно в результате процесса «нащупывания» индивидуально оптимального маршрута всеми участниками движения. Речь идет о том, что одни и те же корреспонденции осуществляются в течение ряда периодов (суток) и каждый участник по опыту предыдущего периода принимает решение о своем маршруте на следующий период. Сходимость процесса к оптимальному расщеплению возможна в предположения о консерватизме большинства и достаточной информированности всех участников движения. Первый выражается в том, что при отсутствии явного преимущества условно оптимального маршрута перед ранее выбранным для определенного периода преобладающее большинство участников не будут переключаться на новый на следующем периоде. Второй – в доступности точной информации о ценах прохождения всех участков сети за последний период. Среднее время прохождения каждого участка, действительно, можно установить с помощью доступных в настоящее время средств неперсонализированного слежения за участниками дорожного движения, фиксируя лишь моменты прохождения каждого автотранспортного средства (АТС) через рубежные сечения каждого участка. Тогда среднее время прохождения участка, не содержащего стоков и источников потоков, будет просто разностью между средними временами прохождения АТС через конечное и начальное сечение участка. Слежение за временем прохождения участков сети может быть выполнено и в динамике. Однако представить данные о динамике характеристик сети в форме, допускающей самостоятельный выбор наиболее выгодного маршрута самими водителями, едва ли возможно даже при предоставлении им средств человеко-машинного диалога. В связи с этим централизованное информационное обеспечение выбора маршрутов для водителей, с одной стороны, желательно для них самих. С другой стороны, оно позволяет реализовать коллективный выбор, выгодный для всех, предлагая (предписывая) водителям, осуществляющим одну и ту же корреспонденцию, разные маршруты в определенной пропорции, зависящей от времени. При этом необходимость в процессе нащупывания наилучшего маршрута отпадает, т.к. равновесная динамика сети рассчитывается. Кроме того, на текущий день в оперативном режиме может рассчитываться сдвиг в распределении маршрутов, компенсирующий известные системе нерегулярные корреспонденции текущего дня, а также изменение дорожной обстановки из-за погодных условий.

Здесь мы рассматриваем способ реализации динамического равновесия транспортных потоков при нескольких упрощающих предположениях: 1) узлы дорожной сети представляют собой идеальные развязки, не задерживающие движение; 2) на многополосных дорогах автомобили могут свободно перераспределяться между полосами, обеспечивая одинаковую скорость на них; 3) начальные и конечные пункты всех корреспонденций – это въезды-выезды в дорожную сеть, привязанные к отдельным ее узлам – Т-образным перекресткам; 4) каждый водитель заявляет о начальном и конечном пункте своей поездки и времени ее начала до того, как поездка началась, и реализует предписываемый ему системой маршрут.

Определим условия и величины, описывающие рассматриваемую задачу. Сеть характеризуется множеством узлов K, включающим множество источников и стоков I, и множеством соединяющих их ориентированных дуг A. Дуга с номером a характеризуется длиной L_a, количеством полос $N_{\mathrm{L}a}$ и максимальной разрешенной скоростью $v_{\mathrm{MAX}a}$. Интенсивность выезда автомобилей из i-го узла-источника в j-й узел-сток характеризуется известной величиной $Q_{ij}(t)$. Мы считаем известным набор рациональных маршрутов P_{ij}, которые могут реализовывать корреспонденцию (i,j) на динамически равновесном распределении; для формального описания маршрута (последовательности дуг) p для любой дуги $a\in p$ обозначим предшествующую дугу $\mathrm{PRE}(a,p)$. Требуется определить для любого момента t интенсивности $Q_p(t)$ для всех $p\in P_{ij}$, в совокупности равные $Q_{ij}(t)$.

Дискретизируя задачу по времени, искомые величины ищем для последовательности $t=r\Delta t$, $r=0,\ldots R$. Для решения задачи требуется уметь определять при известных $Q_{ijp}(r\Delta t)$, $p\in P_{ij}$, $i,j\in I$, время $T_q(r\Delta t)$ выполнения произвольного маршрута $q\in P_{kl}$, $k,l\in I$, начавшегося в произвольный момент времени t. Для этого, в свою очередь, нужно вычислять загруженность всей сети в динамике. Для этого предлагается использовать квазистационарный подход [3], предполагающий, что все движущиеся по определенной дуге АТС в каждый момент времени имеют одинаковую (зависящую от времени) скорость $v_a(t)$, определяемую количеством АТС на единицу длины полосы на данной дуге (плотностью), а также максимальной разрешенной скоростью $v_{\mathrm{MAX}a}$.

Будем характеризовать состояние a-й дуги в момент времени t количеством $N_{ap}(t)$ АТС, следующих по маршруту p и находящихся в данный момент на дуге; здесь $a\in p\in P_{ij}$, $i,j\in I$; множество таких маршрутов обозначим $P_{\mathrm{A}a}$. Будем предполагать, что в качестве скорости потока $v_a(t)$ реализуется

максимальная безопасная скорость $v_{\mathrm{SAVE}}\left(\sum_{p\in P_{Aa}} N_{ap}(t)/(L_a N_{\mathrm{L}a})\right)$, соответствующая данной плотности АТС, если она не превышает $v_{\mathrm{MAX}a}$, и $v_{\mathrm{MAX}a}$ в противном случае. Балансовые соотношения для количества АТС на дугах сети выражаются так: для дуги, начинающейся источником

$$N_p(t+\Delta t) = N_p(t)(1 - v_a(t)\Delta t / L_a) + Q_p(t)\Delta t,$$

а для всех прочих дуг

$$N_p(t+\Delta t) = N_p(t)(1 - v_a(t)\Delta t / L_a) + N_{bp}(t)v_b(t)\Delta t,\ b = PRE(a, p).$$

Время прохождения дуги при начале движения по ней в момент времени t определим как $T_a(t)=L_a/v_a(t)$. Тогда время $T_{\mathrm{P}p}(t)$ прохождения маршрута $p=(a(1),..., a(m))$ при начале движения в момент времени t определим с помощью рекуррентных соотношений:

$T_{\mathrm{P}p0}(t)= t,\quad T_{\mathrm{P}pr}(t)=T_{\mathrm{P}pr-1}(t)+T_{a(r)}(T_{\mathrm{P}pr-1}(t)),\ r=1,..., m,\quad T_{\mathrm{P}p}(t)= T_{\mathrm{P}pm}(t).$

Мы предполагаем, что при фиксированном t набор $P_{\mathrm{EQ}ij}(t)$ равновесных маршрутов, для которых $Q_p(t)>0$, для любой корреспонденции мал и изменяется за рассматриваемый период (сутки) лишь несколько раз. Претендентами на вхождение в $P_{\mathrm{EQ}ij}(t)$ являются субоптимальные маршруты, эффективное вычисление которых (в т.ч. и с учетом динамики загруженности сети) может быть осуществлено методом работы [4].

При заданных множествах $P_{\mathrm{EQ}ij}(t)$ условие динамического равновесия выражается соотношениями:

$$T_{\mathrm{P}p}(t)=T_{\mathrm{P}q}(t),\ p,q\in P_{\mathrm{EQ}ij}(t),\ i,j\in I,\ t\in[0, R\Delta t] \qquad (1)$$

Перенумеровав элементы $P_{\mathrm{EQ}ij}(t)$ как $p(k,i,j,t)$, $k=2,..., N_{\mathrm{EQ}ij}(t)$, перепишем (1) с учетом дискретизации по времени как

$$T_{\mathrm{P}p(r,i,j,t)}(t)-T_{\mathrm{P}p(1,i,j,t)}(t)=0,\ k=2,..., N_{\mathrm{EQ}ij}(t),\ i,j\in I,\ t=r\Delta t,\ r=1,..., R \qquad (2)$$

Определение $Q_{ijp}(r\Delta t)$, $p\in P_{\mathrm{EQ}ij}(t)$, $i,j\in I$, $t=r\Delta t$, $r=1,..., N_0$, путем решения системы уравнений (2) может быть сведено к минимизации суммы квадратов невязок в ограничениях (2) при сепарабельных ограничениях

$$\sum_{p\in P_{\mathrm{EQ}ij}(r\Delta t)} Q_p(r\Delta t). = Q_{ij}(r\Delta t);\ Q_p(r\Delta t)\ge 0,\ p\in P_{\mathrm{EQ}ij}(r\Delta t),\ i,j\in I,\ r=1,...,R \qquad (3)$$

Ввиду очень простой системы ограничений (3) и высокой размерности задачи для ее решения целесообразно использовать простейшие методы типа градиентного метода или метода покоординатного спуска.

Особенностью задачи является то, что множества $P_{\mathrm{EQ}ij}(r\Delta t)$ также себе определяются методом последовательных приближений на начальных итерациях алгоритма из числа субоптимальных маршрутов для каждой корреспонденции и времени старта. Однако, начиная с некоторой итерации, они остаются неизменными.

В докладе на конференции будут представлены результаты вычислительных экспериментов по предложенному методу.

Список литературы

1. *Швецов В.И., Алиев А.С.* Математическое моделирование загрузки транспортных сетей. М.: УРСС, 2003.

2. *Nesterov Y.* Stable traffic equilibria: properties and applications // Optim. Engineering. 2000. V. 1. P. 29–50.

3. *Валуев А.М.* Вычисление оптимальных маршрутов в сети с заданной динамикой ее загруженности для эволюционного решения задачи о равновесном рациональном распределении перевозок // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2011. №ОВ6: Информатизация и управление. С. 115–125.

4. *Valuev A.M.* On the Problem of Efficient Search of the Entire Set of Suboptimal Routes in a Transportation Network // Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE2012. La Manga, Murcia, Spain, 2-5 July 2012. V. 4. P. 1560–1563.

Преобразование схем дорожных сетей

М.С. Васильев

Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН

При построении схем дорожных сетей нередко используются два основных элемента - бинарный разделитель и бинарный сумматор. Схемы только из данных элементов легко представляются в виде

геометрических графов, элементы, получаемые при пересечении ребер (узлы) мы рассматривать в данной работе не будем, считая, что по теореме Понтрягина-Куратовского во всех представленных случаях они могут быть удалены выходом из плоскости.

В качестве основного преобразования будем разделять, и объединять графы на подграфы, в которых только одни вход и все выходы, которые он соединяет. Тем самым мы будем получать подсхемы, числом равному числу входов в систему. Так же сохраним в данных схемах направленность движения по ребрам (от входа к выходам). Будем называть такие подсхемы «разделитель-объединитель» схемами или Р-О схемами.

Наиболее нетривиальным в предлагаемом в данной работе процессе преобразования дорожных сетей является процесс перехода от единого графа дорожной сети к множеству Р-О схем и обратно. В работе данному процессу уделено наибольшее внимание.

Зачастую начальные схемы требуют не столько преобразования, сколько упрощения. Метод разбиения и объединения, позволят это сделать очень простым способом.

Представив начальную схему в виде Р-О схем, несложно заметить некоторые моменты, в которых схема может быть упрощена. Тем самым мы будем работать не с основной схемой, а с ее подсхемами и упростив отдельные подсхемы при объединении получим уже упрощенные сети. Используя указанные методы, мы можем упрощать любые дорожные схемы, для этого можно действовать по следующему алгоритму:

1. Дорожную сеть необходимо сначала представить в виде геометрического графа, затем разбить на подсхемы - Р-О схемы.
2. Далее упрощаем каждую схему отдельно.
3. После упрощения собираем схемы обратно в одну большую. Важно сохранять бинарность отношений, количество входов и выходов, а также число связей между входами и выходами. Важно при сборке подсхем в схему сохранять геометрическую привязку для входов и выходов.

Заметим еще один важный момент: после того, как мы использовали данный алгоритм для начальной схемы, мы получаем не одну сеть, а множество схем одной связанности.

Список литературы

1. *C. E. SHANNON* A Mathematical Theory of Communication. – The Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
2. *Глухарев К.К, Улюков Н.М.* Модель однорядного потока автомобилей. Вывод уравнений и их интегрирование // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2008.– С. 29-38.
3. *Oystain Ore,* Graphs and their uses - 1965.–175 p.

Моделирование автотранспортных потоков в формализме гибридных систем (событийно-переключаемых процессов)

К.К. Глухарев, А.М. Валуев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный МО, Россия

Поток автотранспортных средств (АТС) в городской дорожной сети (ГДС) представляет собой единое целое в силу определенной организации дорожного движения и условий безопасности, которых придерживаются его участники. Автотранспортный поток (АТП) на одной полосе дороги без перекрестков может быть представлен как система материальных точек с удерживающими и неудерживающими связями [1]. На основании развития модели [1] в настоящей работе предлагается общий метод построения моделей дискретных автотранспортных потоков в формализме гибридных систем. Для конкретности изложения он иллюстрируется примером применения к несколько идеализированной ситуации со светофорным регулированием всех перекрестков, где все разрешенные парковки имеют въезды в ГДС и выезды из ГДС в виде Т-образных перекрестков, также снабженных светофорным регулированием; количество полос на каждом участке ГДС соответствует количеству фаз светофора, так что пересечение потоков невозможно, переход АТС из одной полосы в другую не допускается. Такое устройство магистральной дорожной сети предлагается в [2]. Другие возможные условия: разрешенные переходы между полосами, парковки у тротуара, нерегулируемые перекрестки и развязки, не требующие регулирования, – могут быть описаны в том же формализме, однако такое описание значительно более громоздко для изложения.

Общая форма предлагаемой модели близка введенной в работе автора [3], однако не предполагает наличия общего критерия оптимальности всей системы для выбора управлений. Предполагается,

напротив, что участники при выборе текущего режима движения независимо друг от друга преследуют свою ближайшую цель – двигаться со скоростью, наиболее приемлемой для них при существующих ограничениях.

Движение отдельного АТС, подчиняющегося ПДД, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с управлением, подчиняющимся условиям недопущения: 1) опасного сближения (расстояние s_{12} между последовательными АТС со скоростями v_1 и v_2 не менее безопасного расстояния $s_{\mathrm{SAVE}}(v_1,v_2)$), 2) пересечения границы перекрестка на красный свет, 3) превышения максимальной разрешенной скорости и максимальной безопасной скорости при данной кривизне оси трассы. При этом учитываются также предельные возможности ускорения и торможения, в простейшем случае сводящиеся к ограничению на ускорение (которое и служит переменной управления). Кроме зависимости $s_{\mathrm{SAVE}}(v_1,v_2)$), в модели нужно определить $s_{\mathrm{SAVE}\,0}(v)$ – минимальное безопасное расстояние до черты, на которой АТС с текущей скоростью v должен остановиться, и обратную ей зависимость $v_{\mathrm{SAVE}\,0}(s)$.

В силу сказанного, в предположении, что каждый водитель стремится выбирать в рамках принятых ограничений максимальную допустимую и приемлемую для него скорость, ускорение АТС является либо константой, либо величиной, определяемой рекурсивно через ускорение предшествующего АТС (лидера). Система связей постоянна при определенном качественном состоянии элементов автотранспортного потока и системы регулирования, в совокупности образующими вектор дискретного состояния d непостоянной (в общем случае) размерности. Совокупность АТС поделена в каждый момент времени на очереди, т.е. последовательности АТС на отдельных полосах между перекрестками или на стандартных трассах прохождения перекрестков; элементы каждой очереди нумеруются от начала к концу. Компонентами d являются:

- Количество АТС в каждой очереди $\{N(i),\ i=1,\dots,N_{\mathrm{Q}}\}$ и последовательности $\{\{k(j,i),\ j=1,\dots,N(i)\},\ j=1,\dots,N_{\mathrm{Q}}\}$ уникальных номеров АТС в очередях;
- для каждого АТС – признак $p_1(j,i)$ достижения максимальной (желательной) скорости, допустимой по скоростным ограничениям и условию безопасности на повороте;
- для лидера i-й очереди, при условии, что текущая фаза светофора запрещает требуемое направление движения на перекрестке, – признак $p_0(i)$ достижения максимальной безопасной скорости;
- для каждой пары смежных АТС в очереди – признак наличия связи $p_2(j,i)$ (сближения j-го АТС до минимальной допустимой дистанции с предшествующим АТС);
- для r-го светофора – номер фазы h_r.

В качестве количественных фазовых переменных могут быть приняты:

- для каждого АТС – линейная координата $s_{k(j,i)}$ (длина дуги осевой линии полосы от ее начала до положения центра масс АТС) и скорость $v_{k(j,i)}$; $s_{k(j,i)}\in[0,\ S(i)]$;
- для r-го светофора – время $t_{\mathrm{TL}\,r}$, прошедшее с начала текущей фазы светофорного цикла.

Кроме того, допускаются индивидуальные параметры АТС и светофоров. Для k-го АТС это его длина, желаемая скорость $v_{\mathrm{OPT}\,k}$, максимальное ускорение при разгоне $a_{\mathrm{MAX}\,k}$ и торможении $b_{\mathrm{MAX}\,k}$; номер начального узла–источника и момент выезда из него; в варианте модели с предопределенными маршрутами АТС – также количество и последовательность проходимых участков ГДС – $N_{\mathrm{C}}(k)$; $i(k,1),\dots,i(k,N_{\mathrm{C}}(k))$. Для r-го светофора – количество фаз $H(r)$ и продолжительность каждой $T(h,r)$.

Компоненты вектора d изменяются в момент событий достижения фазовой траекторией некоторого многообразия. Фактически момент каждого события определяется в зависимости от нескольких фазовых координат, возможно, при определенном значении некоторых компонент d. Так, уменьшение на единицу значения $N(i)$ происходит в двух случаях: 1) если $s(1,i)=S(i)$ и $h(r)$ соответствует направлению движения АТС с номером $k(1,i)$ на данном перекрестке и 2) в момент переключения фазы светофора на требуемую для $k(1,i)$-го АТС, уже достигшего границы перекрестка. В обоих случаях происходит сдвиг номеров АТС в последовательности $\{k(j,i),\ j=2,\dots,N(i)\}$, увеличение на единицу $N(i')$ для i'-ой очереди, в которую переходит $k(1,i)$-е АТС, помещение его номера в конец этой очереди.

Наступление события смены фазы светофора определяется простым условием: $t_{\mathrm{TL}\,r}(t)=T(h(r),r)$. Следствием события, однако, кроме вышеупомянутого, является также обнуление $t_{\mathrm{TL}\,r}(t)$, т.е. скачкообразное изменение компоненты фазового вектора.

Условие изменения $p_1(j,i)$ состоит в достижении предельного значения скорости, вообще говоря, зависящего от радиуса кривизны трассы в текущем положении $R_{\mathrm{C}}(p_1(j,i),i)$. Результатом этого является переход от режима движения с максимальным ускорением к режиму с нулевым ускорением (при движении по прямому участку), либо, в общем случае, с ускорением, позволяющим двигаться с максимальной безопасной скоростью.

Условие изменения $p_0(i)$ состоит либо в переключении фазы светофора, либо (при красном сигнале) в достижении равенства $v_{\mathrm{SAVE}\,0}(s_{k(1,i)})=v_{k(1,i)}$. Следствием его является переключения ускорения с $a_{\mathrm{MAX}\,k(1,i)}$ или 0 на $-b_{\mathrm{MAX}\,k(1,i)}$.

Взаимосвязь следующих друг за другом АТС приводит к образованию кластеров [4] – цепочек АТС, находящихся на минимальном безопасном расстоянии друг от друга. Существует несколько условий изменения $p_2(j,i)$ – при сближении АТС с хвостом более медленного кластера и, наоборот, при разрыве разгоняющегося кластера из-за невозможности для отдельных АТС иметь равное с предыдущим АТС ускорение. АТС, образующие кластер, имеют взаимосвязанные ускорения, позволяющие сохранять минимальные безопасные расстояния друг от друга.

Общая форма событийно-переключаемого процесса, описывающего совокупность АТП на ГДС, такова. Элементы транспортной системы (АТП+светофоры) характеризуются компонентами вектора дискретного состояния d и фазового вектора $x(t)$ непостоянной размерности. Моментами переключений значения d период рассмотрения [0,T] делится на этапы, их временные границы обозначаются как $[T(l), T(l+1))$. В пределах l-го этапа сохраняется значение $d(l)$ вектора дискретного состояния, а вместе с ним и размерность фазового вектора, значение которого в момент времени t удобно обозначать $x(t, l)$. Вместе с ним сохраняется и система обыкновенных дифференциальных уравнений, которым подчиняется динамика $x(t, l)$:

$$dx(t, l)/dt=f(d(l), x(t, l), u(t, l)) \qquad (1)$$

Принимая для динамики АТС уравнения движения материальной точки по прямой с ускорением в роли управления, имеем для соответствующих компонент $x(t, l)$

$$ds_{k(j,i,l)}(t, l)/dt=v_{k(j,i,l)}(t, l); \qquad dv_{k(j,i,l)}(t, l)/dt=a_{k(j,i,l)}(t, l);$$

здесь обозначение $k(j,i,l)$ подчеркивает зависимость номера автомобиля на определенном месте в очереди от номера этапа. Аналогично для светофоров имеем

$$dt_{\mathrm{TL}\ r}(t,l)/dt=1.$$

В дополнение к (1) в течение этапа сохраняется и закон управления, в общем виде

$$u(t, l)=U(x(t, l), d(l)), \qquad (2)$$

обеспечивающий соблюдение текущих ограничений на управление (в данном случае, характеризующих возможности разгона и торможения) и всех траекторных ограничений на состояние (условий безопасности), обращающихся на l-ом этапе в равенство. Примером условия (2) являются условия на ускорение лидера очереди: при скорости, большей $v_{\mathrm{SAVE}\ 0}(S(i)–s_{k(1,i,l)})$, $a_{k(1,i,l)}(t, l)=a_{\mathrm{MAX}\ k(1,i,l)}$, если скорость меньше желаемой, иначе 0, при торможении на красный свет $a_{k(1,i,l)}(t, l)=–b_{\mathrm{MAX}\ k(1,i,l)}$. Для автомобилей, следующих один за другим в кластере, ускорение следующего вычисляется через ускорение предыдущего по формуле, следующей из условия

$$ds_{\mathrm{SAVE}}(v_{k(j,i,l)}(t, l),v_{k(j,i+1,l)}(t, l))/dt–v_{k(j,i,l)}(t, l)+v_{k(j,i+1,l)}(t, l)=0.$$

Каждое из перечисленных условий имеет место лишь при определенных значениях $d(l)$ и выражается непрерывно дифференцируемой по первому аргументу зависимостью $U_m(x(t, l), d(l))$. Этап заканчивается, когда наступает одно из условий переключения, возможного для качественного состояния $d(l)$. При этом переключение типа w происходит в момент T_w, когда для вектора $x^{(w)}(t, l)$, образованного из части компонент $x(t, l)$, выполнится условие

$$G_w(x^{(u)}(T_u, l), d(l))=0 \qquad (3)$$

Предполагается, что заведомо при $t\in[T(l), T_w)$ $G_w(x^{(w)}(t, l), d(l))<0$ и $d(G_w(x^{(w)}(t, l), d(l)))/dt>0$. Границей $T(l+1)$ l-ого этапа служит наименьшее из T_w, $w\in W(d(l))$, определяемых на основе условия (3). Следствием наступления события является изменение некоторых компонент вектора качественного состояния и, быть может, фазового вектора, в форме

$$d(l+1)=D_w(d(l)); \qquad x(T(l+1), l+1)=X_w(d(l)) \qquad (4)$$

В общую форму модели (1)–(4) можно вложить разные ситуации, в т.ч. переход АТС между полосами, парковку у тротуара на отдельных участках УДС; различную организацию движения на регулируемых и нерегулируемых перекрестках и т.п. В ней можно выразить различные предположения о выборе маршрутов АТС, начиная с распределения направлений движения на перекрестках в соответствии с заданными пропорциями (т.н. матрицы перемешивания потоков) и заканчивая условно-оптимальным программным или позиционным выбором маршрута, исходя из его конечного пункта.

Использование модели пригодно как для качественного исследования явлений в АТП, что было продемонстрировано для частных случаев модели в статье [5], так и для вычислительных экспериментов. Нами разработан алгоритм расчета траекторий системы (1)–(4), показывающий вычислительные преимущества работы с моделями данной формы при имитационном моделировании АТП по сравнению с наиболее распространенным в настоящее время агентным подходом.

Список литературы

1. *Васильев М.С., А.Э. Воробьев, К.К. Глухарев, И.Н. Калинин* О системе материальных точек с удерживающими и неудерживающими связями // Труды 55-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и

технических наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. Т. 2. Москва – Долгопрудный – Жуковский: МФТИ, 2012. С. 16-18.

2. Дорожная сеть мегаполиса, 2012 г. Патент РФ на полезную модель №.121817. Заявка №2012131254 от 23.07.2012 г. Приоритет полезной модели от 23.07. 2012 г. / Глухарев К.К., Ганиев Р.Ф., Калинин И.Н., Соловьев А.А., Украинский Л.Е.

3. *Valuev A.M.* Control problem for event-switched processes // Acta Universitatis Apulensis. 2005. №. 10. P. 7–18.

4. *Kerner B.S.* Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three-phase traffic theory. Berlin: Springer, 2009.

5. *Глухарев К.К., Улюков Н.М.* К теории автомобильных потоков // Труды МФТИ. 2010, №2(6). С. 58–66.

Пропускная способность и уровень загруженности транспортной сети на примере математической модели автомагистрали*

Е.Г. Дорогуш

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

Рассматривается задача о минимизации общего времени движения для модели автомагистрали (в том числе кольцевой автомагистрали) за счет управления в виде ограничений на входящие потоки.

Используемая динамическая модель автомагистрали представляет собою дискретизацию непрерывной гидродинамической модели.

Задача минимизации общего времени в пути, с одной стороны, приводит к определению пропускной способности автомагистрали, а с другой стороны, содержит задачу о контролируемом уровне концентраций (плотностей), то есть о таком уровне, который соответствует свободному потоку (движению с максимальной скоростью) и может быть сохранен сколь угодно долго за счет управления входящими потоками.

Если в начальный момент времени на каких-либо участках (ребрах сети) превышен контролируемый уровень плотности, можно поставить задачу уменьшения уровня концентраций до контролируемого за наименьшее время. Решение этой задачи поэтому можно назвать уровнем загруженности дорожной сети.

Список литературы

1. *Daganzo C.F.* The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // Transp. Res.-B. 1994. 28. N 4. P. 269–287.

2. *Gomes G., Horowitz R., Kurzhanskiy A.A.* et al. Behavior of the cell transmission model and effectiveness of ramp metering // Transp. Res.-C. 2008. 16. N 4. P. 485–513.

3. *Kurzhanskiy A.A.* Modeling and Software Tools for Freeway Operational Planning: Ph.D. thesis / EECS Department, University of California, Berkeley. 2007.

4. *Куржанский А.А., Куржанский А.Б., Варайя П.* Роль макро-моделирования в активном управлении транспортной сетью // Труды МФТИ. 2010. 2. № 4. С. 100–118.

5. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. 2-е издание. М.: Изд-во МЦНМО, 2013.

Микросистемный способ отбора единственного равновесия в модели Бэкмана†

Е.И. Ершов

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Цель работы: Предложить и мотивировать способ отбора (на основе концепции равновесия

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-01-00261-а и 13-01-90419 Укр_ф_а) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2239.2012.1)

† Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00494-а, 12-01-33007 мол-а-вед; гранта Президента РФ № МК-5285.2013.9.

макросистемы) равновесия Нэша-Вардропа в модели равновесного распределения транспортных потоков Бэкмана в случае не единственности равновесия.

Вводная часть

Транспортная сеть города представляется ориентированным связанным графом $\Gamma = (V, E)$, где V - вершины, E - дуги сети. На этом графе вводится понятие корреспонденции $W = \{ w = (i, j): i, j \in V\}$, множество возможных пар 'пункт отправления' – 'пункт назначения'.

Набор ребер, соединяющий две вершины - путь p. Путей может быть несколько, поэтому целесообразно говорить о множестве путей P_w, отвечающих данной корреспонденции w.

Пусть x_p [авт./час] - поток автомобилей по пути p, тогда:

$$f_e = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p,\ \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in P \\ 0, & e \notin P \end{cases} \quad , P = \bigcup_{w \in W} P_w, \text{ т.е. } f_e = \Theta x_p.$$

Пусть $\tau_e(f_e)$ - удельные затраты на проезд по дуге e. Как правило полагают, что это возрастающие гладкие функции от f_e. $G_p(x)$ - затраты временные или финансовые на проезд по пути p. Считается, что $G_p(x) = \sum_{e \in p} \tau_e(f_e(x))\delta_{ep}$. Обозначим число перемещений, осуществляемых согласно корреспонденции $w \in W$ в единицу времени, как d_w.

Теорема [3]. Вектор x^* будет равновесием Нэша-Вардропа тогда и только тогда, когда

$x \in \mathrm{Arg} \min_x [\Psi(f(x)) = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e(x)): f = \Theta x, x \in X]$,

где $\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z)dz$, где $X = \{x \geq 0: \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W\}$.

Если преобразование $G(*)$ - строго монотонное, то равновесие x - единственно. Если $\sigma_{e'}(*) > 0$, то равновесный вектор распределения потоков по ребрам f - единственный (этот факт еще не гарантирует единственность вектора x распределения потоков по путям).

Для того, чтобы "отобрать" единственное равновесие, введем "разумную" эволюционную динамику. Предполагается, что свой путь на $(n+1)$-м шаге игрок из корреспонденции w выбирает согласно смешанной стратегии с вероятностью:

$Prob_p^w(n+1) = \gamma exp(-G_p(x(n))/T)/Z_n^w, w \in W$,

выбрать путь $p \in P_w$, а с вероятностью $1 - \gamma$ действовать согласно стратегии, использованной на предыдущем шаге. Параметр γ характеризует "консерватизм": чем меньше γ, тем более консервативный игрок. T - "температура", характеризует отношение к риску. Чем больше температура, тем более склонен игрок к рискованным действиям. Z_n^w - нормировочный множитель.

Введенная стохастическая динамика при условиях $\tau_{e'}(*) > 0$, $\gamma \ll M^{-\frac{1}{2}} \ll T \ll 1$ в $MO(T)$ (M - среднее число пользователей ребра на одном шаге) на больших временах, с большой вероятностью будет находиться в окрестности такого равновесия Нэша-Вардропа: $x^* = arg \min_{x \in X: \Theta x = f^*} \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} x_p(\ln(x_p/e) - 1)$,

где f^* – единственное решение задачи

$V(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z)dz \to \min_{x \in X: f = \Theta x} x \in X: \Theta x = f^*$.

Теоретическая часть

Утверждение 1. Транспортная система на больших временах с большой вероятностью находится в малой окрестности множества равновесий Нэша-Вардропа [1].

На основе теоремы Тротерра-Куртца [2] можно свести исследование системы к поведению СОДУ:

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \tilde{x}_p = \frac{exp(-\tilde{G}_p(\tilde{x})/T)}{\sum_{p' \in P_w} exp(-\tilde{G}_{p'}(\tilde{x})/T)} - \tilde{x}_p,$$

где $\tilde{x}_p = x_p/d_w$, $\tilde{G}_p(\tilde{x}) = G_p(x)$, $p \in P_w$, $w \in W$. При малых значениях T аттрактор этой динамической системы находится в окрестности равновесий Нэша– Вардропа.

Утверждение 2. Инвариантная мера введенного марковского процесса (редуцированного только на равновесия Нэша-Вардропа) асимптотически по $M \gg 1$ (M – среднее число пользователей ребра) представляется в виде:

$$\mu(x) \sim \frac{[\sum_{p \in P} x_p]!}{\prod_{p \in P} x_p!} \sim exp(\sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} x_p(\ln(x_p/e) - 1)).$$

Вычислительный эксперимент

Возможны такие ситуации, когда равновесие в системе доставляется различными распределениями потоков по путям. Наглядным примером такой ситуации является граф, предложенный В.И. Швецовым (рис. 1)[4].

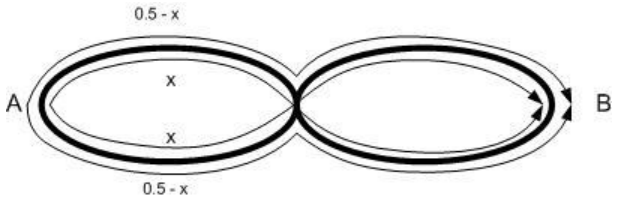


Рис. 1: Граф дорог с заданной динамикой выбора путей.

На рисунке 1 представлен граф выбора путей по которым водители едут с интенсивностью 1 из пункта A в пункт B. Стоимость проезда по ребрам - одинаковые функции(возрастающие) от потока.

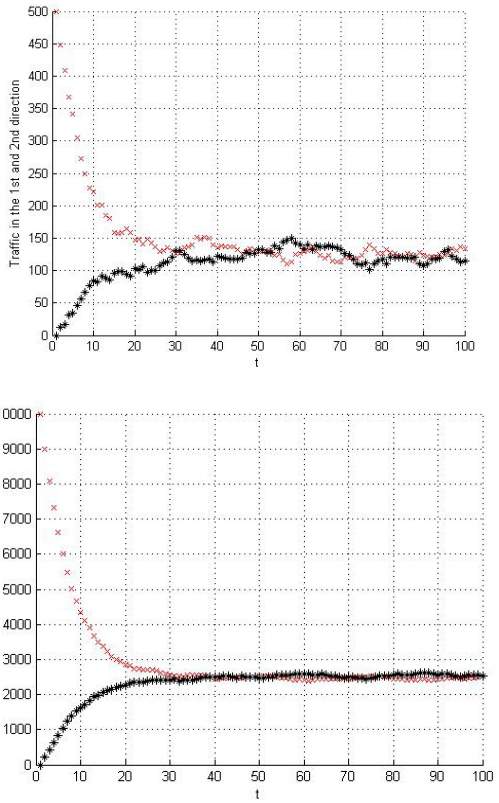


Рис. 2: Динамика сходимости потоков для примера ”пенсне” (рис. 1), график сглаживается с увеличением числа пользователей, соответственно: N = $500, 10^5$.

Поставлен вычислительный эксперимент. За основу взят пример на рис. 1.

Посчитано (рис. 2), что точкой концентрации инвариантной меры, введенной выше стохастической марковской динамики, в данном случае будет: $x^* = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$. Это подтверждает предположение, сделанное в [1]. Эти результаты мотивируют наличие связи между утв. 1 и утв. 2. То есть, несмотря на ненулевую вероятность покинуть множество равновесных потоков, система все равно стремится к ”единственному” распределению по потокам.

Список литературы

1. *Гасников А.В., Дорн Ю.В., Нестеров Ю.Е., Шпирко С.В.* О трехстадийной версии модели стационарной динамики // Математическое моделирование, 2013 (в печати) [HTML] http://dcam.mipt.ru/students/elective/traffic_flow.html

2. *Ethier N.S., Kurtz T.G.* Markov processes. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley and Sons Inc., New York, 1986.

3. *Стенбринк П.А.* Оптимизация транспортных сетей. М.: Транспорт, 1981.

4. *Швецов В.И.* Проблемы моделирования передвижений в транспортных сетях //Труды МФТИ. – 2010. – Т.2, №4. – С. 169-179.

Разработка оптимальной транспортной инфраструктуры города на базе игровой модели «администрация – поставщики услуг навигации»

В.В. Захаров, А.Ю. Крылатов

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием построений в [2, 3]. Рассматривается бескоалиционная игра типа лидер-последователь, где лидер – администрация города, а два последователя – поставщики услуг навигации. Администрация (лидер) стремится найти оптимальное количество полос для движения на существующих путях из пункта отправления в пункт прибытия и соответствующее системное равновесие транспортных потоков с тем, чтобы минимизировать общее время движения транспорта по улично-дорожной сети (УДС) города. В свою очередь, поставщики навигационных услуг (последователи), реагируя на заданное администрацией (лидером) количество полос по возможным маршрутам движения, достигают равновесного по Нэшу перераспределения своих клиентов по УДС.

В силу того, что клиенты поставщиков навигационных услуг (последователи) являются составной частью общего транспортного потока, их реакция на заданное администрацией (лидером) количество полос для движения, в общем случае, может нарушить системное равновесие и тем самым увеличить общее время движения транспорта по УДС. Таким образом, администрации (лидеру) следует заранее учитывать реакцию поставщиков навигационных услуг (последователей) и именно с поправкой на эту реакцию искать оптимальное количество полос для движения по существующим путям и соответствующее оптимальное распределение транспортных потоков. Следует отметить, что в таком случае речь уже не будет идти о системном равновесии, но – о равновесии по Штакельбергу.

Другими словами, можно сказать, что в данной работе предложен подход к управлению пропускной способностью УДС мегаполиса на основе использования принципа системного равновесия транспортных потоков в условиях конфликта интересов поставщиков навигационных услуг и администрации мегаполиса. При этом, следует отметить, что если системное равновесие, по своему смыслу, является результатом воздействия администрации мегаполиса на процесс распределения потоков, рассчитанным на долгосрочную перспективу, то нахождение равновесия по Нэшу в игре навигаторов на нижнем уровне позволяет оценить отклонение распределения потоков от состояния системного равновесия в коротком периоде (в конкретном периоде оказания услуги навигации по запросу пользователя).

Резюмируя, следует отметить, что в игре нижнего уровня (среди поставщиков навигационных услуг) доказано существование и единственность равновесия по Нэшу. Более того, найден явный вид оптимальных (равновесных) стратегий навигаторов, что позволило сформулировать двухуровневую игру в аналитическом виде. В итоге, удалось предложить метод нахождения равновесия по Штакельбергу в построенной теоретико-игровой двухуровневой модели управления. Таким образом, появилась возможность использования принципа равновесия по Штакельбергу для определения параметров оптимальной инфраструктуры УДС, обеспечивающей минимизацию времени движения транспортных потоков города, с учётом влияния независимых систем навигации.

Список литературы

1. *Захаров В.В., Крылатов А.Ю.* Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Т.4, № 4. С. 23–44.

2. *Крылатов А.Ю.* Распределение транспортных потоков в мегаполисах // Сборник статей двенадцатой международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности». СПб.: Издательство Политехнического университета, 2011. С. 356–359.

3. *Krylatov A, Zakharov V.* Nash equilibrium in a game of navigation providers // Proceedings of the 7th German-Russian Logistics Workshop DR-LOG 2012. SPb.: SPbU, 2012. С. 224–230.

Об оценках критического числа машие в городе

А.А. Лыков, В.А. Малышев, В. Мильчевская

Мехмат МГУ

При расчетах городских транспортных потоков важное значение имеют критические значения (индексы) количества машин, при которых возникают те или иные проблемы. Один из таких индексов, которому уделялось большое внимание – число машин, при котором где-либо возникают пробки. Эта

задача была в течение десятилетий чрезвычайно популярна для сетей связи и вообще так называемых сетей с очередями. При этом возникла математика, интересная сама по себе и являющаяся обобщением классической теории массового обслуживания на большие сети.

Здесь рассматривается другое критическое значение, которому, напротив, никогда особого внимания не уделялось. Именно числу движущихся в данный момент машин, выше которого весь город встает.

В докладе рассматриваются мкатематические модели, качественно моделирующие этот критический индекс. Основой модели служит метрический плоский граф улиц (или полос движения), по которому движутся частицы (или отрезки разных размеров). Каждая машина движется как угодно, единственным ограничением является фиксированное минимальное расстояние между точками и максимально возможная допустимая скорость. Оказывается, что это критическое значение сильно зависит от типов перекрестков, но не от их числа. Математические методы совсем другие, непохожие на методы теории очередей и мало использующие вероятностные соображения.

Применение методов микроскопического моделирования для решения задач о запрете перестроения и перекрёстке*

Т.С. Обидина

Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

Многие существующие как макро-, так и микромодели транспортных потоков позволяют исследовать только движение по однополосным трассам [1]. В настоящей работе было построено обобщение модели Трайбера на случай многополосных дорог, для чего существующая модель была обобщена на двумерный случай. Описание модели Трайбера можно прочитать в [2].

Желаемые скорости изначально распределены по Гауссу с ограничением максимального и минимального значения скорости.

В обобщенной модели процесс перестроения осуществляется после проверки на возможность (например, с точки зрения безопасности) и необходимость смены полосы.

В рамках данной модели въезды и съезды описываются как источники и стоки.

Было изучено влияние изменения дорожной разметки на величину V - среднее отношение (по времени и всем АТС) текущей скорости АТС к желаемой.

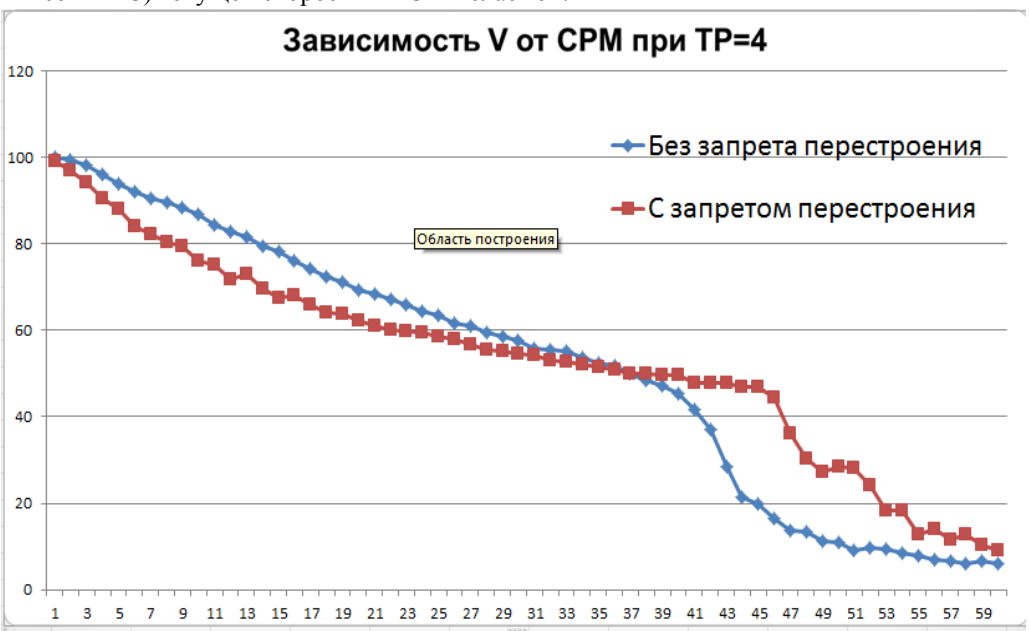


Рис. 1. Зависимость V потока, %, от интенсивности входящего потока, АТС/мин

Для получения каждой из точек на графике использовались результаты 32 независимых расчётов, которые затем усреднялись. Была рассмотрена двухполосная дорога в случаях разрешенного перестроения и в случае его запрета, доля грузовиков (АТС со специальными параметрами) среди всех

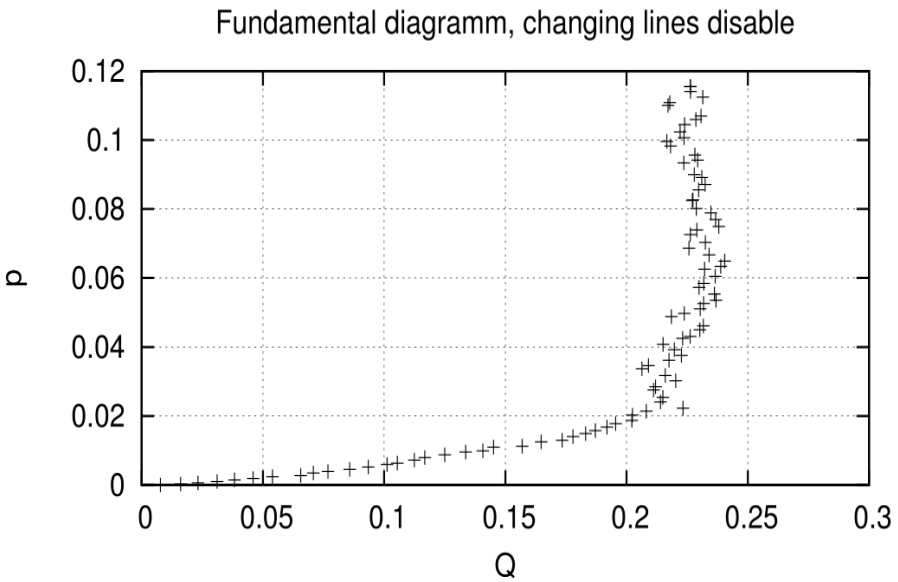
* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00494-а, 12-01-33007 мол-а-вед; гранта Президента РФ № МК-5285.2013.9.

АТС равна 4%. Построен график зависимости величины от интенсивности входящего потока автомобилей (АТС/мин).

Также были построены фундаментальные диаграммы, к примеру, картина при запрете перестроения указана на рис. 2. (По оси абцисс- поток, по оси ординат - плотность).

Далее описанная выше модель была расширена введением постоянного так называемого параметра цели для каждого АТС (целью могут быть, например, съезд с дороги или поворот в определенную сторону на светофоре). Распределение целей для каждой конкретной задачи определяется индивидуально.

Алгоритм перестроения АТС включает в себя также смену полосы, если это необходимо для достижения цели. Также в модель был добавлен алгоритм движения АТС на перекрестках в зависимости от светофорных фаз и окружающих АТС.



Построенная микроскопическая модель была использована для решения задачи о движении автотранспорта на регулируемом перекрёстке для оптимизации светофорного режима, а именно - определения длительности сигналов светофоров, обеспечивающей максимальную пропускную способность перекрёстка с заранее заданными неоднородными многофазными потоками. Были рассмотрены и изучены механизмы оптимизации реально существующих перекрестков, в том числе с неравномерными потоками ([3]).

По результатам моделирования при расчете общей пропускной способности была построена таблица пропускной способности перекрёстка в зависимости от выбора светофорных фаз.

Также было получено, что получившиеся оптимальные фазы устойчивы к колебаниям входящих потоков. Данные, полученные в настоящей работе, согласуются с наблюдениями практиков, занимающихся оптимизацией дорожного движения.

В данной работе также были изучены некоторые существующие узловые модели [4] и представлена попытка связать полученную модель с макроскопическими узловыми моделями.

Список литературы

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под редакцией Гасникова А.В. М.: МЦНМО, 2013.

2. *Kesting A., Treiber M.* Calibrating car-following models by using trajectory data:Methodological study. //Transportation Research Record/ 2008, 2088, P. 148--156.

3. Моделирование и прогнозирование движения транспортных потоков на перекрёстке ул. Уральская - ул. Крупской [HTML] http://road.p erm.ru/index.php?id=894

4. *Tampere C., Corthout R., Cattrysse D., Immers L.* A generic class of first order node models for dynamic macroscopic simulation of traffic flows. //Transportation Research Part B/ 2011, P. 289--309.

Об одном способе решения задачи энтропийно-линейного программирования для расчета матрицы корреспонденций*

Н.С. Чепанов

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Необходимость расчета матрицы корреспонденций часто возникает в рамках транспортных моделей, например Энтропийной модели Вильсона (см. например [4]). При этом требуется решить задачу оптимизации энтропийного функционала на симплексе при линейных ограничениях:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min\limits_{x \in Q} \\ Q = \{x \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j,\ j = 1,\dots,m \end{cases} \tag{1}$$

Функция Лагранжа этой задачи:

$$L(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - b_j \right) \tag{2}$$

Предлагается перейти к двойственным переменным:

$$\min_{x \in Q} \max_{\lambda} L(x,\lambda) = \max_{\lambda} \min_{x \in Q} L(x,\lambda).$$

Двойственная задача, согласно [2], имеет вид:

$$\phi(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j + \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(-c_i - 1 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ij}) \right) \to \max \tag{3}$$

Следует отметить, что в двойственном пространстве λ выбирается эвклидова норма, а в пространстве x выбирается норма l_1, поскольку это согласуется с допустимым множеством.

В работе будет показано, как для заданных параметров точности $\epsilon_f, \epsilon_g > 0$ найти λ^* такое, чтобы были выполнены следующие условия оптимальности:

$$\begin{aligned} &\| \nabla\phi(\lambda^*) \|_2 \leq \epsilon_g, \\ &\left\langle \nabla\phi(\lambda^*), \lambda^* \right\rangle \geq -\epsilon_f \end{aligned} \tag{4}$$

В соответствии с Леммой 2 из [3]: Если для точки λ^* из области определения функционала двойственной задачи выполнено (4), то верно:

$$\begin{aligned} &x(\lambda^*) \in Q \\ &\| Ax(\lambda^*) - b \|_2 \leq \epsilon_g, \\ &f(x(\lambda^*)) \leq f^* + \epsilon_f. \end{aligned} \tag{5}$$

где $f^* = \min\limits_{x \in Q} f(x)$.

Подобные оптимизационные задачи, согласно [1], можно решить методом быстрого градиентного спуска. Основная проблема при применении метода в данной задаче – неограниченность области определения функции ϕ, что делает невозможной оценку скорости сходимости итераций. Поскольку все известные оценки основаны на ограниченности допустимого множества.

Чтобы обойти это ограничение, предлагается применить метод из [3].

Сначала регуляризуем функцию: $\phi_\delta(\lambda) = \phi(\lambda) - \frac{\delta}{2} \| \lambda \|_2^2$ значение δ будет определено позднее.

Поскольку рассматривается эвклидова норма, то константа Липщица градиента регуляризованного функционала двойственной задачи будет равна $L_{\phi_\delta} = L_\phi + \delta$

Итерационный процесс быстрого градиентного спуска, согласно [1]:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= u_k + \frac{1}{L_\phi + \delta} \nabla\phi_\delta(u_k) \\ u_{k+1} &= \lambda_{k+1} + \tau(\lambda_{k+1} - \lambda_k), k \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00494-а, 12-01-33007 мол-а-вед.

где $\tau = \dfrac{[L_\phi + \delta]^{1/2} - \delta^{1/2}}{[L_\phi + \delta]^{1/2} + \delta^{1/2}}$ и $\lambda_0 = 0$

За счет регуляризации функции в работе получены оценки числа итераций алгоритма в зависимости от константы Липшица градиента функционала двойственной задачи и требуемых критериев точности:

$$k = O\left(\frac{\sqrt{L_\phi \Delta}}{\epsilon_g} \ln \frac{L_\phi \Delta}{\epsilon_f \epsilon_g^2} \right) \qquad (7)$$

где согласно [2]

$$\Delta = \min_{x \in Q} \{ f(x) : Ax = b \} - \min_{x \in Q} f(x) = \phi^* - \phi(0) = \ln(n)$$

$$L_\phi = \frac{1}{\sigma(f)} \| A \|^2 = max\{ (Ax, \lambda) \| x \|_1 \le 1, \| \lambda \|_2 \le 1 \} = \max_{1 \le i \le n} \| a_i \|_2 .$$

При этом используется тот факт, что константа строгой выпуклости σ энтропийного функционала $f(x)$ в 1-ой норме равна единице.

Параметр регуляризации $\delta = \left(\dfrac{\epsilon_g}{2\sqrt{\epsilon_f} + \sqrt{\Delta}} \right)^2 \approx \dfrac{\epsilon_g^2}{\Delta}$.

В докладе будет рассказано о численных экспериментах, в которых сравнивался описанный здесь метод (основанный на идеях работы [3]) с популярными сейчас на практике методами первого порядка из работ [5-7].

Список литературы

1. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М: МЦНМО, 2010.
2. *Yu. Nesterov.* Smooth minimization of non-smooth functions. Springer-Verlag. May 2005, Mathematical Programming Volume 103, Issue 1, pp 127-152 (www.core.ucl.ac.be/services/psfiles/dp03/dp2003-12.pdf)
3. *Gasnikov A., Nesterov Y.* Dual methods for functions with bounded variation. CORE Discussion Papers. 2013.
4. *Вильсон А.Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.
5. *Fang S.-C., Rajasekera J.R., Tsao H.-S.J.* Entropy optimization and mathematical programming. Kluwer's International Series, 1997.
6. *Гасникова Е.В.* Двойственные мультипликативные алгоритмы для задач энтропийно-линейного программирования ЖВМ и МФ. 2009. Т.49 № 3. С. 453–464.
7. *Попков Ю.С.* Теория макросистем: Равновесные модели. М.: УРСС, 2013.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ АВТОРОВ

B

Bejanishvili L.G. 118

K

Kartvelishvili I.I. 118
Kosolap A.I. 22

M

Malinov V.G. 25

N

Noghin V.D. 58

S

Shonia O.B. 119
118

T

Tsomaia N. 119

А

Агасандян Г.А. 96
98
101
Аникин А.М. 106
Аркин В.И. 72
Афонин А.А. 133
132

Б

Байрамов О.Б. 101
Балаханов В.А. 27
Балашов В.В. 27
196
Башлаева И.А. 146
160
Белолипецкий А.А. 124
126
Белотелов Н.В. 127
Блинов Н.Г. 177
Богданов И.П. 178
Богданова А. 198
Богданова Ю.Н. 197
Бондаренко А.Е. 103
Бронштейн Е.М. 28

В

Вагапова Д.М. 28
Валуев А.М. 200
203
Вартанов С.А. 166
Васин А.А. 167
Вдовин П.М. 30
Вышинский Л.Л. 137
139

Г

Галанжа В.Ф. 124
Гасанов И.И. 104
106
Герасимов А.Н. 128
Глухарев К.К. 203
Голиков А.И. 36
Гончар Д.Р. 32
Горбачук В.М. 179
Гордуновский В.М. 33
74
Горелик В.А. 147
150
148
Горелов М.А. 152
Григорьева К.В. 154
Гринев И.Л. 139
141
Груздева Т.В. 34

Д

Давидсон М.Р. 178
Делицын Л.Л. 75
Дигас Б.В. 78
Дикусар В.В. 79
Дорогуш Е.Г. 206
Дунин-Барковский В.Л. 137

Е

Евтушенко Ю.Г. 36
Егорова Л.Г. 103
Ерешко А.Ф. 106
109
Ерешко Ф.И. 104
106
Ерохин В.И. 37
Ершов Е.И. 206

Ж

Жукова А.А. 82

З

Захаров В.В. 209
Зенкевич Н.А. 156
Зибров Г.В. 129
Золотова Т.В. 150
148
Золотухин В.В. 5
Зоркальцев В.И. 181
Зотов И.А. 30
Зятчин А.В. 156

И

Исаев В.К. 5

К

Каменев Г.К. 60
Карпенко А.П. 61
Катунин В.П. 139
Киселев А.Б. 198
Киселев В.Г. 122
Кондратьев А.Ю. 183
Коноваленко И.А. 127
Кононенко А.Ф. 110
Коротченко А.Г. 39
Костенко В.А. 27
30
56
Красников А.С. 37
Крейнес Е.М. 133
Крейнес М.Г. 133
132
Крылатов А.Ю. 209
Кудрявцев К.Н. 158

Л

Лаптин Ю.П. 39
Лебедев В.Н. 160
Лебедев Д.М. 42
Логинов А.А. 142
144
Лотов А.В. 63
Луценко М.М. 161
Лыков А.А. 209

М

Макарова Е.А. 197
Макарова М.А. 83
Макольская Я.С. 185
Малышев В.А. 209
Маненкова А.С. 198
Матвеенко В.Д. 86
Машечкин А.И. 170
Меньшиков И.С. 8
Меньшикова О.Р. 8
Мижидон А.Д. 43
Мижидон К.А. 43
Мильчевская В. 209
Михайлов В.В. 64
Можжерина Е.Ю. 87

Мокрый И.В. 181
Мохонько Е.З. 163
Мурашкин М.В. 12
Мухлисуллина Д.Т. 61
Мячин А.Л. 13

Н

Нагапетян Т.А. 190
Назарова И.А. 15
Назмутдинова А.В. 28
Никитин В.Ф. 198
Николаев П.В. 167
Новикова Н.М. 170

О

Обидина Т.С. 210
Обросова Н.К. 88
Оленев Н.Н. 79
83
Орлов А.В. 34
44

П

Пеникас Г.И. 103
Плакунов А.В. 30
Попова О.А. 15
Поспелов И.Г. 82
90
Посыпкин М.А. 47
Прилуцкий М.Х. 48
Промахина И.М. 112
Прудский М.В. 94

Р

Рабинович Я.И. 66
Радионов С.А. 90
Разжевайкин В.Н. 135
Розенберг В.Л. 78
Русанов И.А. 179
Рыжкин А.И. 172
Рябиков А.И. 67
Рябов В.В. 49

С

Самохвалов С.Ю. 74
Семенов К.О. 126
Сигал И.Х. 47
Скиндерев С.А. 17
144
Сластников А.Д. 72
Смелянский Р.Л. 30
Смирнов А.В. 196
Смирнов Н.Н. 198
Сморякова В.М. 39
Соколовский Ю.М. 188
Соломаха А.Г. 91
Сосина Ю.В. 166
Стрекаловский А.С. 52
Сытов А.Н. 106
109
114

Т

Тихонова М.В. 49
Томилов А.А. 64
Трошенкова М.Г. 139

У

Умывакин В.М. 64
129
Усов А.Б. 172

Ф

Фатеев К.Г. 63
Федин Г.Г. 68
Филатов А.Ю. 185
188
Флёрова А.Ю. 190
Фрумкин Д.А. 197
Фуругян М.Г. 53
32

Х

Хвостов М.Н. 37
Хорошилова Е.В. 19
Хохлов А.С. 54

Ц

Цедрик В.Г. 74
Цейтлина Т.О. 196
Цодиков Ю.М. 54

Ч

Чабан А.Н. 8
Чепанов Н.С. 212
Чуканов С.В. 93

Ш

Шадринцева Н.В. 161
Шайкина П.Г. 154
Шананин А.А. 88
Шахнов И.Ф. 70
Шварц Д.А. 174
Швец А.В. 129
Шевченко В.В. 110
Шестов П.Е. 56
Широков А.Н. 141
144
Широков Н.И. 139
142
Шпитонков М.И. 128

Я

Яминов Р.И. 20